

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
для ВТУЗов

А.В. Пантелеев
А.С. Якимова
А.В. Босов

ОБЫКНОВЕННЫЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области авиации, ракетостроения
и космоса в качестве учебного пособия для студентов
высших технических учебных заведений*



Москва
“Высшая школа”
2001

УДК 517.9
ББК 22.161.5
П 16

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор *И.А. Соколов*
(директор Института проблем информатики РАН);
д-р физ.-мат. наук, профессор *Б.М. Миллер*

Пантелеев А.В., Якимова А.С., Босов А.В.

П 16 Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 2001. — 376 с.: ил.

ISBN 5-06-004134-4

Изложены аналитические, приближенно-аналитические и численные методы и алгоритмы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Применение каждого метода продемонстрировано на решениях типовых и нетиповых примеров, охватывающих различные приложения к задачам механики, экономики, расчета электрических цепей и биологических систем. Особое внимание уделено специфике решения задач анализа выходных процессов и устойчивости одномерных и многомерных динамических систем, исследуемых в теории управления.

Для студентов высших технических учебных заведений.

УДК 517.9
ББК 22.161.5

Учебное издание

Пантелеев Андрей Владимирович
Якимова Альбина Степановна
Босов Алексей Вячеславович

**ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ**

Зав. редакцией *Т. А. Рыкова*
Художественный редактор *Ю.Э. Иванова*
Художник *Н.А. Шепетинова*

ЛР № 010146 от 25.12.96. Изд. № ВТИ-146. Подп. в печать 21.05.2001
Формат 60х90^{1/16}. Бум. офс. № 1. Гарнитура Таймс. Печать офсетная
Объем: 23,50 усл. печ. л., 24,00 усл. кр.-отт. Тираж 8000 экз.
Заказ № 1268

ГУП «Издательство «Высшая школа»,
127994, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.
Факс: (095) 200-03-01, 200-06-87 E-mail: V-Shkola@g23.relcom.ru
<http://www.v-shkola.ru>

Отпечатано во ФГУП ИПК «Ульяновский Дом печати»
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14

ISBN 5-06-004134-4

© ГУП «Издательство «Высшая школа», 2001

Оригинал-макет данного издания является собственностью издательства «Высшая школа», и его репродуцирование (воспроизведение) любым способом без согласия издательства запрещается.

Введение

Дифференциальные уравнения являются одним из основных математических понятий, наиболее широко применяемых при решении практических задач. Причина этого состоит в том, что при исследовании физических процессов, решении различных прикладных задач, как правило, не удастся непосредственно найти законы, связывающие величины, характеризующие исследуемые явления. Обычно легче устанавливаются зависимости между теми же величинами и их производными или дифференциалами. Соотношения такого рода и называются дифференциальными уравнениями.

Решение задачи исследования физического явления можно разделить на два этапа:

1. Составление дифференциального уравнения, которое при определенных предположениях описывает сущность рассматриваемого явления.

2. Нахождение решения дифференциального уравнения, то есть функциональной зависимости между величинами, характеризующими исследуемое физическое явление.

Возможности и правила составления дифференциальных уравнений определяются знанием законов той области науки, с которой связана природа изучаемой задачи. Так, например, в механике могут использоваться законы Ньютона, в теории электрических цепей - законы Кирхгофа, в теории скоростей химических реакций - закон действия масс и так далее. Однако на практике часто встречаются случаи, когда законы, которые могли бы позволить составить дифференциальное уравнение, неизвестны. Тогда прибегают к различным упрощающим предположениям, касающимся протекания процесса при малых изменениях параметров-переменных. К дифференциальным уравнениям в таком случае приводит предельный переход. Вопрос соответствия математической модели и реального явления решается на основе анализа результатов опытов и сравнения их с поведением решения полученного дифференциального уравнения.

Для нахождения решения уравнений применяются аналитические и численные методы. Аналитические методы позволяют найти точное решение задачи, но лишь для ограниченного класса дифференциальных уравнений. С помощью численных методов получают приближенные решения, но для значительно более широкого круга проблем.

Рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих процесс составления дифференциальных уравнений.

Пример В.1. Рассмотрим электрическую схему с заданным сопротивлением R и емкостью C (рис. В.1). В начальный момент времени $t_0 = 0$ емкость не заряжена. Требуется составить дифференциальное уравнение, описывающее изменение напряжения на конденсаторе u_c после замыкания ключа при условии действия источника с постоянным напряжением E .

Решение. Запишем уравнение второго закона Кирхгофа и начальное условие:

$$u_c + iR = E, \quad u_c(t_0) = u_c(0) = 0.$$

Используя равенство $i = C \frac{du_c(t)}{dt}$, получаем

$$RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = E, \quad u_c(0) = 0. \quad (\text{B.1})$$

Уравнение (B.1) связывает независимую переменную t , искомую функцию $u_c(t)$ и ее первую производную $\frac{du_c(t)}{dt}$. Это дифференциальное уравнение первого порядка. Решение уравнения - искомая функция $u_c(t)$ - должна удовлетворять дифференциальному уравнению (обращать его в тождество) и начальному условию $u_c(0) = 0$.

Пример B.2. Для схемы (рис. B.2) с известными параметрами C, R, r составить дифференциальное уравнение, описывающее изменение выходного напряжения $u_{\text{вых}}(t)$ от времени при известном законе изменения входного напряжения $u_{\text{ex}}(t)$.

Решение. Запишем первый и второй законы Кирхгофа:

$$\begin{cases} i_r = i_c + i_R, & i_r = \frac{u_{\text{вых}}}{r}; & i_R = \frac{u_c}{R}; & i_c = C \frac{du_c}{dt}, \\ u_{\text{ex}} = u_{\text{вых}} + u_c. \end{cases}$$

Отсюда

$$\frac{u_{\text{вых}}}{r} = C \frac{d(u_{\text{ex}} - u_{\text{вых}})}{dt} + \frac{u_{\text{ex}} - u_{\text{вых}}}{R}$$

или

$$RC \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + \left(1 + \frac{R}{r}\right) u_{\text{вых}} = RC \frac{du_{\text{ex}}}{dt} + u_{\text{ex}}. \quad (\text{B.2})$$

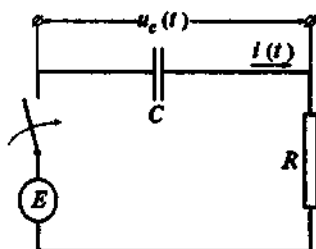


Рис. B.1

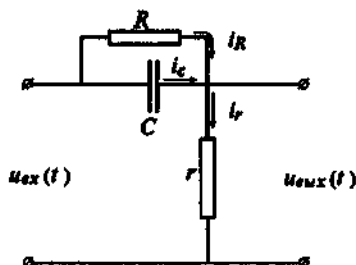


Рис. B.2

Как и в предыдущем примере, получено соотношение, в которое входят искомая функция $u_{\text{вых}}(t)$ и ее первая производная $\frac{du_{\text{вых}}}{dt}$. Уравнение (B.2) является дифференциальным уравнением первого порядка.

Пример В.3. Груз массы m соединен пружинами жесткости k со стенками контейнера, заполненного жидкостью с коэффициентом вязкого трения λ (рис.В.3). Требуется получить дифференциальное уравнение, описывающее перемещение груза из положения равновесия (состояния покоя) вдоль оси Ox , если контейнер движется с ускорением $\alpha(t)$.

Решение. Запишем второй закон Ньютона, который в данном случае имеет вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{инерц} - F_{пруж} - F_{в.тр.},$$

где $F_{инерц} = ma$ - сила инерции, $F_{пруж} = -kx$ - сила сопротивления пружины, определяемая законом Гука, $F_{в.тр.} = -\lambda \frac{dx}{dt}$ - сила вязкого трения. Отсюда

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = m \alpha(t). \quad (B.3)$$

Состоянию покоя, из которого начинается движение груза, соответствуют нулевые начальные условия: $x(0) = 0$, $\frac{dx}{dt}(0) = 0$.

Уравнение (B.3) связывает независимую переменную t , искомую функцию $x(t)$ и ее первую и вторую производные. Это дифференциальное уравнение второго порядка. При $\alpha(t) = 0$ получаем уравнение свободных колебаний:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (B.4)$$

Если, кроме того, предположить, что $\lambda = 0$ (вязкое трение отсутствует), то получим уравнение

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \quad (B.5)$$

описывающее свободные колебания в среде без сопротивления.

Пример В.4. Составить дифференциальное уравнение, описывающее движение тела массы m , брошенного в момент времени $t=0$ вертикально вверх из положения x_0 со скоростью V_0 , под действием силы тяжести.

Решение. Запишем второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg.$$

Отсюда

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g, \quad x(0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = V_0. \quad (B.6)$$

Как и (B.5), уравнение (B.6) является дифференциальным уравнением второго порядка.

Пример В.5. Рассмотрим схему с известными параметрами R, L, C и заданным законом изменения напряжения $e(t)$ (рис.В.4). В начальный момент ток в цепи отсутствует, а емкость не заряжена. Требуется составить дифференциальное уравнение, описывающее изменение напряжения на конденсаторе.

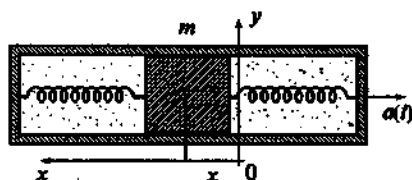


Рис.В.3

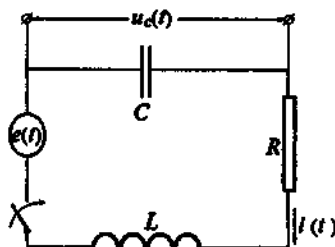


Рис.В.4

Решение. Запишем уравнения второго закона Кирхгофа, которые в данном случае имеют вид

$$L \frac{di}{dt} + iR + u_c = e(t), \quad i = C \frac{du_c}{dt}, \quad u_c(0) = 0, \quad i(0) = 0.$$

Отсюда

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = e(t), \quad u_c(0) = 0, \quad \frac{du_c}{dt}(0) = 0. \quad (\text{В.7})$$

Уравнение (В.7) связывает независимую переменную t , искомую функцию $u_c(t)$ и ее первую и вторую производные. Это дифференциальное уравнение второго порядка.

Если представить исходные уравнения второго закона Кирхгофа в виде

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i - \frac{u_c}{L} + \frac{e(t)}{L}, & i(0) = 0, \\ \frac{du_c}{dt} = \frac{i}{C}, & u_c(0) = 0, \end{cases} \quad (\text{В.8})$$

то получается система двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций $u_c(t)$, $i(t)$ с нулевыми начальными условиями.

Для рассмотренных простейших задач, взятых из различных областей знаний, общим является то, что искомая функция должна быть определена из соотношений, в которые кроме нее входят еще и ее производные, то есть из дифференциальных уравнений, изучению которых и посвящено данное пособие.

Многочисленные дифференциальные уравнения, встречающиеся на практике, могут быть разделены на несколько типов, для каждого из которых в настоящее время развита своя теория. В настоящем пособии рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), в которых неизвестная функция зависит только от одного аргумента. В противоположность этому в дифференциальных уравнениях с частными производными неизвестная функция зависит от нескольких аргументов.

Физические процессы, которые могут быть описаны дифференциальными уравнениями, весьма разнообразны и часто встречаются в практической деятельности. Величины, характеризующие такие процессы, как правило, изменяются с течением времени, поэтому, если не оговаривается особо, будем интерпретировать независимую переменную t как время.

Будем обозначать независимую переменную буквой t , неизвестные функции - $x_1(t), \dots, x_n(t)$, а производные функции $x(t)$ - $x'(t), x''(t), \dots, x^{(m)}(t)$. Также употребляются обозначения:

$$x'(t) = \frac{dx}{dt}, \quad x''(t) = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Анализ примеров В.1-В.5 приводит к понятию одномерных динамических систем, описываемых одним дифференциальным уравнением, характеризующим поведение выходного сигнала $x(t)$ в зависимости от изменения входного сигнала $g(t)$ (рис.В.5), а также многомерных динамических систем, описываемых системой дифференциальных уравнений, где суммарное число входных и выходных сигналов больше двух (рис.В.6).



Рис.В.5

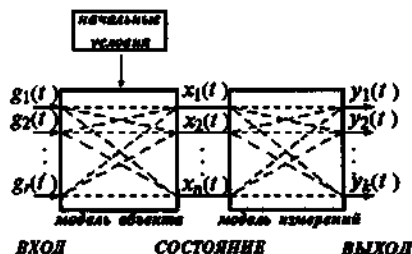


Рис.В.6

Заметим, что в примере В.1 $x(t) = u_c(t)$, $g(t) = E$; в примере В.2 $x(t) = u_{вых}(t)$, $g(t) = u_{вх}(t)$; в примере В.3 $x(t) = x(t)$, $g(t) = ma(t)$; в примере В.4 $x(t) = x(t)$, $g(t) = -g$; в примере В.5 $x(t) = u_c(t)$, $g(t) = e(t)$.

Таким образом, все рассмотренные системы содержат входной сигнал, описывающее систему дифференциальное уравнение и выходной сигнал. Эти три составляющие образуют полную математическую модель одномерной динамической системы.

Обобщениями уравнения (В.1) могут служить уравнения вида

$$Tx' + x = g(t), \quad Tx' - x = g(t), \quad (B.9)$$

где T - постоянная времени. В примере В.1 эта постоянная определяется параметрами электрической цепи: $T = RC$.

Соответственно уравнения (B.3) и (B.7) приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} T^2 x'' + 2\xi Tx' + x &= g(t), \\ T^2 x'' + 2\xi Tx' - x &= g(t), \\ T^2 x'' - 2\xi Tx' + x &= g(t), \end{aligned} \quad (B.10)$$

где ξ - коэффициент демпфирования. Так, в примере В.3: $T = \sqrt{m/k}$, $\xi = \lambda/2\sqrt{mk}$; в примере В.5: $T = \sqrt{LC}$, $\xi = R/2\sqrt{L/C}$.

Модели многомерных динамических систем обычно состоят из двух блоков: модели объекта и модели измерений. Модель объекта, как правило, описывается системой ОДУ относительно n координат так называемого вектора состояния $X = (x_1, \dots, x_n)^T$, полностью характеризующего ее поведение. Модель измерений связывает вектор состояния с вектором выхода (в случае детерминированных систем эта связь задается алгебраическими соотношениями). В большинстве практических задач измерения дают неполную информацию о состоянии системы, однако, именно по этой информации принимаются решения о качестве системы. Каждая компонента $g_i(t)$ входного векторного сигнала $G(t) = (g_1(t), \dots, g_r(t))^T$ в общем случае влияет на все координаты $x_1(t), \dots, x_n(t)$ вектора состояния X и вектора выхода $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_k(t))^T$.

Возвращаясь к примеру В.5, можно объяснить его результаты с точки зрения многомерных систем. В данном случае многомерная система описывается системой дифференциальных уравнений (B.8), входной сигнал $G(t) = a(t)$, вектор состояния двумерный: $X = (i, u)^T$, вектор выхода одновременно является вектором состояния. Такая ситуация типична для систем с полной информацией о состоянии.

Предполагая далее, что рассматриваемое дифференциальное уравнение или система описывает конкретную динамическую систему, выделим следующие задачи анализа, решаемые на этапе проектирования:

анализ выходных процессов (для решения этой задачи необходимо по входному сигналу и описанию системы найти выходной сигнал);

анализ устойчивости (изучается способность системы возвращаться в исходный или близкий к нему установившийся режим из различных начальных состояний);

анализ чувствительности (исследуется влияние изменения параметров системы на ее поведение);

анализ управляемости (изучается способность системы переходить из заданного начального состояния в заданное конечное под действием входного сигнала, характеризующего в данном случае управляющее воздействие);

анализ наблюдаемости (исследуется возможность восстановить информацию о состоянии системы по имеющимся измерениям).

В настоящем пособии основное внимание уделяется задачам анализа выходных процессов и устойчивости. Теоретическим исследованиям остальных задач посвящено значительное число работ, из которых читателям рекомендуются [22, 33, 42].

Часть 1. Аналитические методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Общие теоретические положения

1.1. Основные определения

1. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее независимую переменную t , неизвестную функцию $x(t)$ этой независимой переменной и ее производные $x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)$:

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0, \quad (1.1)$$

где F - функция указанных аргументов, заданная в некоторой области их изменения.

2. *Порядком* дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Уравнение (1.1) является уравнением n -го порядка, уравнения (B.1), (B.2) могут быть записаны в виде дифференциального уравнения первого порядка:

$$x' + a_0 x = f(t), \quad (1.2)$$

а уравнения (B.3)-(B.7) - в виде дифференциального уравнения второго порядка:

$$a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = f(t), \quad (1.3)$$

где a_0, a_1, a_2 - заданные величины, $f(t)$ - известная функция.

3. Если в соотношении (1.1) функция F такова, что его можно представить в виде

$$x^{(n)} = f(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t)), \quad (1.4)$$

то уравнение называется ОДУ n -го порядка, *разрешенным относительно старшей производной*.

Уравнения (B.1)-(B.7) могут быть записаны в форме (1.4), а например, уравнение $\ln x' - x' + x = t$ - нет; оно относится к типу уравнений, не разрешенных относительно старшей производной.

4. Уравнение называется *линейным*, если функция F линейна относительно искомой функции и ее производных, то есть если уравнение может быть записано в виде

$$a_n(t) x^{(n)} + a_{n-1}(t) x^{(n-1)} + \dots + a_0(t) x = f(t), \quad (1.5)$$

где $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_0(t), f(t)$ - известные функции.

Если все функции $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_0(t)$ не зависят от t , то есть $a_i(t) = a_i = \text{const}, i = 0, 1, \dots, n$, то уравнение

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = f(t) \quad (1.6)$$

называется *линейным уравнением с постоянными коэффициентами*.

Уравнения (B.1)-(B.7) относятся к типу (1.6).

5. Уравнение

$$a_n(t) x^{(n)} + a_{n-1}(t) x^{(n-1)} + \dots + a_0(t) x = 0 \quad (1.7)$$

называется *однородным* уравнением, соответствующим неоднородному уравнению (1.5).

Уравнения (B.4), (B.5) - однородные, причем уравнение (B.4) является однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению (B.3). Таким образом, однородное уравнение получится из неоднородного, если положить $f(t) = 0$.

6. *Решением* дифференциального уравнения n -го порядка называется функция $x(t)$, непрерывная на некотором интервале (a, b) вместе со своими производными до $(n-1)$ -го порядка включительно, имеющая производную $x^{(n)}(t)$ и такая, что подстановка $x(t)$ в уравнение обращает его в тождество.

Рассмотрим, например, функцию $x(t) = t + C$, где C - произвольная постоянная. Путем непосредственной подстановки этой функции в уравнения $x' = 1$ и $x'' = 0$ можно убедиться в том, что она является их решением. Аналогично, функции $x(t) = \cos 2t$, $x(t) = \cos 2t + \sin 2t$ и вообще $x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$, где C_1, C_2 - произвольные постоянные, являются решениями уравнения $x'' + 4x = 0$.

Отметим еще, что процедура решения простейшего дифференциального уравнения $x' = f(t)$ означает нахождение функции по ее производной, то есть сводится к нахождению неопределенного интеграла $x(t) = \int f(t) dt + C$. Данный факт и приведенные примеры показывают, что дифференциальные уравнения имеют бесконечные множества решений.

Вернемся к уравнению (B.6). Его решение можно найти непосредственно методами математического анализа. Действительно, из уравнения $x'' = -g$ следует

$$x'(t) = \int x''(t) dt + C_1 = \int (-g) dt + C_1 = -gt + C_1.$$

Далее

$$x(t) = \int x'(t) dt + C_2 = \int (-gt + C_1) dt + C_2 = -gt^2/2 + C_1 t + C_2.$$

Таким образом, решения уравнения (B.6) образуют совокупность функций, зависящую от двух произвольных постоянных C_1, C_2 . Конкретные значения произвольных постоянных определяются начальной скоростью V_0 и

начальным положением x_0 , которые позволят выбрать из указанной совокупности конкретное решение. В результате может быть найден закон движения тела, брошенного вертикально вверх.

7. График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*. Совокупность интегральных кривых, зависящая от набора произвольных постоянных, называется *семейством интегральных кривых*.

Например, решения уравнения (В.6) образуют двухпараметрическое семейство парабол $x(t) = -gt^2/2 + C_1t + C_2$, каждая из которых является интегральной кривой.

8. Одной из важнейших задач в теории и приложениях дифференциальных уравнений является *задача Коши (начальная задача)*, в которой требуется найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Для уравнения n -го порядка задача Коши ставится следующим образом. Среди всех решений уравнения (1.4) требуется найти такое решение $x(t)$, что функция $x(t)$ и ее производные до $(n-1)$ -го порядка включительно при заданном значении t_0 независимой переменной t принимают заданные значения $x_0^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, то есть

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}. \quad (1.8)$$

Начальные условия (1.8), рассматриваемые совместно с уравнением, описывающим какой-либо процесс, делают задачу "физически определенной". Так, при решении уравнения (В.6) использование начальных условий позволяет из совокупности решений $x(t) = -gt^2/2 + C_1t + C_2$ выделить те, которые им удовлетворяют:

$$x(0) = C_2 = x_0,$$

$$x'(0) = (-gt + C_1)'|_{t=0} = C_1 = V_0.$$

Отсюда искомый закон движения

$$x(t) = -gt^2/2 + V_0t + x_0.$$

Другими примерами задач Коши являются задачи (В.1), (В.3), (В.7).

Отметим, что не является очевидным тот факт, что для любого уравнения и любых начальных условий задача Коши имеет единственное решение.

ТЕОРЕМА 1.1. (О существовании и единственности решения задачи Коши (1.4), (1.8)).

Пусть выполнены следующие условия:

а) функция $f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$ определена и непрерывна в некоторой замкнутой области $\bar{D}$, а также имеет в $\bar{D}$ ограниченные частные производные по переменным $x, x', \dots, x^{(n-1)}$, то есть существует число $M > 0$ такое, что

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x'} \right| \leq M, \quad \dots, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x^{(n-1)}} \right| \leq M;$$

б) точка $(t_0, x_0, x'_0, \dots, x^{(n-1)}_0)$ лежит внутри области $\bar{D}$.

Тогда решение уравнения (1.4) с начальными условиями (1.8) существует и единственно.

З а м е ч а н и е 1.1.

1. Теорема дает достаточные условия единственности, а значит, задача может иметь единственное решение и при невыполнении какого-либо условия теоремы.

2. Для существования решения достаточно только непрерывности функции $f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$ в области $\bar{D}$, но при этом решение может не быть единственным.

Вопрос о единственности решения задачи Коши имеет исключительный интерес как для самой теории ОДУ, так и для различных приложений. Действительно, зная, что решение задачи Коши единственно, и находя это решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, исследователь, кроме того, уверен, что других решений, удовлетворяющих тем же начальным условиям, нет. С точки зрения приложений это означает, что получен единственный закон, описывающий исследуемое явление. Причем этот закон определяется только дифференциальным уравнением, соответствующим этому явлению, и конкретными начальными данными.

Пример 1.1. Найти решение задачи Коши:

$$x' = \frac{x}{t}, \quad x(0) = 2.$$

Решение. Функция $f(x, t) = \frac{x}{t}$ не является определенной и непрерывной в окрестности точки $(0, 2)$. Через эту точку не проходит ни одна интегральная кривая семейства $x(t) = Ct$, $t \neq 0$, которое образуют решения исходного уравнения (рис.1.1). Таким образом, задача Коши не имеет решения.

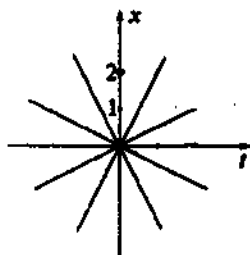


Рис.1.1

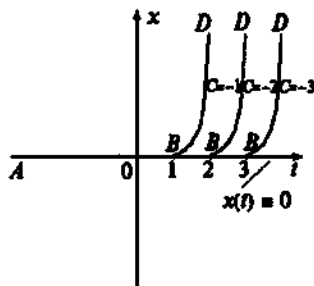


Рис.1.2

Пример 1.2. Решить задачу Коши:

$$x' = 2\sqrt{x}, \quad x(1) = 0.$$

Решение. Функция $f(t, x) = 2\sqrt{x}$ определена и непрерывна в области $\bar{D}$, состоящей из таких точек (t, x) , для которых t - любое, $x \geq 0$. Производная $f'_x(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ функции $f(t, x)$ по переменной x не является ограниченной в точках оси Ot , и, следовательно, в любой окрестности точки $(1, 0)$ не выполняются условия теоремы 1.1, гарантирующие единственность решения. Таким образом, решение поставленной задачи Коши (с заданными начальными условиями) может быть неединственным. Действительно, с одной стороны, очевидным решением поставленной задачи является функция $x(t) = 0$, а с другой стороны, переписав уравнение при $x(t) \neq 0$ в виде $\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt$ и проинтегрировав обе части равенства, получим множество решений $\sqrt{x} = t + C$. Геометрически это множество правых ветвей парабол $x = (t + C)^2$ с вершинами в точках $(-C, 0)$ (выбираются правые ветви парабол, так как по условию $x' = 2\sqrt{x} \geq 0$, а $x' = \operatorname{tg} \alpha$ - угловой коэффициент касательной к кривым семейства). В результате решение задачи Коши не является единственным (рис.1.2). Из начального условия $x(1) = 0$ получаем, что $C = -1$. Таким образом, через точку $(1, 0)$ проходят по крайней мере две интегральные кривые: $x(t) = 0$ и $\sqrt{x} = t - 1$ (рис.1.2). Но, кроме этих функций, интегральными кривыми являются также кривые $AOBD$ при любых B, D . Итак, поставленная задача Коши имеет бесконечное множество решений.

Заметим, что задача Коши для уравнения $x' = 2\sqrt{x}$ не имеет единственного решения при любом начальном условии вида $x(t_0) = 0$, где t_0 - любое число. Решение задачи Коши для данного уравнения будет единственным при условии $x(t_0) = x_0$, где t_0 - любое число, $x_0 > 0$.

9. Общим решением ОДУ n -го порядка в области $G \subset \bar{D}$ ($\bar{D}$ - область, в которой выполнены условия теоремы 1.1) называется функция $x = x(t, C_1, \dots, C_n)$, зависящая от n произвольных постоянных, и такая, что при подстановке в уравнение она обращает его в тождество при любых значениях $C_1, \dots, C_n$.

Геометрически общее решение в области G представляет собой семейство непересекающихся интегральных кривых, полностью покрывающих всю область.

10. Общим интегралом ОДУ называется соотношение вида

$$\Phi(t, x, C_1, \dots, C_n) = 0,$$

неявно определяющее общее решение.

11. При конкретных значениях $C_1, \dots, C_n$, включая $\pm \infty$, из общего решения выделяется *частное решение*, а общий интеграл становится *частным интегралом*. В каждой точке (t, x) частного решения или частного интеграла выполняются условия теоремы 1.1.

Пример 1.3. Найти решение задачи Коши:

$$x'' = 1, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = \frac{3}{2}.$$

Решение. Интегрируя дважды правую и левую части рассматриваемого уравнения, получаем его общее решение:

$$x'(t) = t + C_1, \quad x(t) = t^2/2 + C_1 t + C_2.$$

При $t=0$ получаем $x(0) = C_2 = 1$, $x'(0) = C_1 = \frac{3}{2}$. Итак, частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $x(t) = t^2/2 + \frac{3}{2}t + 1$. Соответствующая интегральная кривая изображена на рис.1.3.

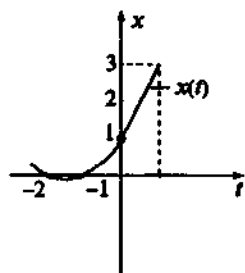


Рис.1.3

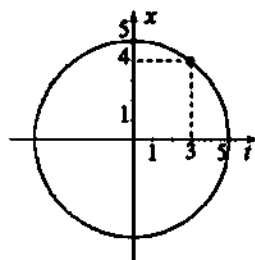


Рис.1.4

Пример 1.4. Найти решение задачи Коши:

$$x' = -\frac{t}{x}, \quad x(3) = 4.$$

Решение. Перепишем уравнение следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x} \quad \text{или} \quad xdx = -tdt.$$

Проинтегрировав правую и левую части последнего равенства, получим

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + C_1.$$

Таким образом, получен общий интеграл $\frac{x^2}{2} + \frac{t^2}{2} - C_1 = 0$. Так как $x(3) = 4$, то $8 + \frac{9}{2} - C_1 = 0$ или $C_1 = \frac{25}{2}$. Поэтому частный интеграл имеет вид $x^2 + t^2 - 25 = 0$. Соответствующая интегральная кривая изображена на рис.1.4.

12. Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым решением*.

Особое решение не может быть получено из формулы для общего решения (общего интеграла) ни при каких числовых значениях постоянных, включая $\pm\infty$. Геометрически особому решению соответствует интегральная

кривая, не содержащаяся в семействе интегральных кривых, составляющих общее решение. Так, в примере 1.2 решение $x(t) = 0$ является особым, а его график является *ограничивающей* семейства интегральных кривых (в данном случае парабол) (см. рис. 1.2).

13. *Системой дифференциальных уравнений* называется система уравнений, связывающих независимую переменную t , неизвестные функции $x_1(t), \dots, x_n(t)$ этой независимой переменной и их производные $x_1'(t), \dots, x_1^{(m_1)}(t), \dots, x_n'(t), \dots, x_n^{(m_n)}(t)$:

$$\Phi_i(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(m_1)}, \dots, x_n, x_n', \dots, x_n^{(m_n)}) = 0, \quad i = 1, \dots, l, \quad (1.9)$$

где Φ_i - функции указанных аргументов, заданные в некоторой области их определения.

14. Наибольшее из чисел $m_1, \dots, m_n$ называется *порядком* системы (1.9).

15. При $m_1 = \dots = m_n = 1$ система (1.9) называется *системой первого порядка*:

$$\Phi_i(t, x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n') = 0, \quad i = 1, \dots, l. \quad (1.10)$$

16. Если $l = n$ и уравнения можно разрешить относительно производных, то (1.10) можно переписать в виде

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ x_2' = f_2(t, x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (1.11)$$

где $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$, - известные функции.

Система (1.11) называется *нормальной системой* или *системой, записанной в нормальной форме Коши*.

В векторной форме система (1.11) имеет вид

$$X' = F(t, X) \quad \text{или} \quad \frac{dX}{dt} = F(t, X), \quad (1.12)$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $F(t, X) = \begin{pmatrix} f_1(t, X) \\ \vdots \\ f_n(t, X) \end{pmatrix}$.

К системе (1.12) путем введения новых неизвестных функций и увеличения числа уравнений приводится произвольная система вида (1.9).

17. *Порядком* нормальной системы (1.11) называется число входящих в нее уравнений.

Так, система (1.11) является системой n -го порядка, а система (В.8), рассмотренная в примере В.5, является системой второго порядка.

18. Система называется *линейной*, если функции $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$ линейно зависят от неизвестных функций $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{cases} \quad (1.13)$$

где $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$, $i, j = 1, \dots, n$ - заданные функции переменной t .

Линейная система в векторной форме имеет вид

$$X' = A(t)X + F(t) \quad \text{или} \quad \frac{dX}{dt} = A(t)X + F(t), \quad (1.14)$$

$$\text{где } A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Если все функции $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, \dots, n$ не зависят от t , то есть $a_{ij}(t) = a_{ij} = \text{const}$, то система

$$X' = AX + F(t) \quad (1.15)$$

называется *линейной системой с постоянными коэффициентами*.

Примером линейной системы с постоянными коэффициентами является система (В.8).

19. Система

$$X' = A(t)X \quad (1.16)$$

называется *однородной* системой, соответствующей неоднородной системе (1.14).

Однородная система получается из неоднородной при $F(t) = 0$.

20. *Решением* системы (1.11) называется совокупность n функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$, непрерывных на некотором интервале (a, b) , такая, что подстановка этих функций в (1.11) обращает каждое уравнение в тождество.

21. *Задача Коши* для системы (1.11) состоит в нахождении решения системы (1.11), удовлетворяющего начальным условиям:

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = x_{n0}. \quad (1.17)$$

Геометрический смысл данной задачи состоит в том, что ищется та интегральная кривая, которая проходит через точку $(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ пространства R^{n+1} .

В векторной форме задача Коши (1.11), (1.17) имеет вид

$$X' = F(t, X), \quad X(t_0) = X_0, \quad (1.18)$$

где $X_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}$ - вектор начальных значений.

Примером задачи Коши для системы дифференциальных уравнений является задача (B.8).

ТЕОРЕМА 1.2. (О существовании и единственности решения задачи Коши (1.11), (1.17)).

Пусть выполнены следующие условия:

а) функции $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ определены и непрерывны в некоторой замкнутой области $\bar{D}$, а также имеют в $\bar{D}$ ограниченные частные производные по переменным $x_1, \dots, x_n$, то есть существует число $M > 0$ такое, что

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right| \leq M, \dots, \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right| \leq M, \quad i = 1, \dots, n;$$

б) точка $(t_0, x_{10}, \dots, x_{n0})$ лежит внутри области $\bar{D}$.

Тогда решение системы (1.11) с начальными условиями (1.17) существует и единственно.

З а м е ч а н и е 1.2.

1. Теорема дает достаточные условия единственности, а значит, задача может иметь единственное решение и при невыполнении какого-либо условия теоремы.

2. Для существования решения достаточно только непрерывности функций $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$ в области $\bar{D}$, но при этом решение может не быть единственным.

3. Понятия общего и частного решений, общего и частного интегралов для систем дифференциальных уравнений полностью совпадают с приведенными в пп.9-12, если заменить функцию $x(t)$ на вектор-функцию $X(t)$.

Пример 1.5. Показать, что задача Коши

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2, & x_1(0) = 4, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_2, & x_2(0) = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Функции $f_1(t, x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$ и $f_2(t, x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ непрерывны и имеют ограниченные частные производные по всем переменным в любой области их изменения. Согласно теореме 1.2 рассматриваемая задача Коши имеет единственное решение.

Непосредственной подстановкой можно проверить, что общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, \\ x_2(t) = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}, \end{cases} /$$

а частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, получается при $C_1 = 3$, $C_2 = 1$:

$$x_1(t) = 3e^{3t} + e^{-t}, \quad x_2(t) = 3e^{3t} - e^{-t}.$$

1.2. Основные понятия, связанные с исследованием и решением дифференциальных уравнений

1. Интегрирование ОДУ. Процесс нахождения решения ОДУ называется *интегрированием* ОДУ.

Основной задачей теории интегрирования дифференциальных уравнений является нахождение всех решений (как общего, так и особых) данного уравнения или системы и изучение свойств этих решений. При этом задача интегрирования ОДУ может рассматриваться по-разному. В узком смысле эта задача сводится к нахождению решения в виде элементарных функций или выражения искомого решения через элементарные функции. В более широком смысле задачу интегрирования можно считать решенной, если искомое решение приведено к квадратурам, то есть сведено к операции поиска неопределенного интеграла. Так, например, уравнение $x' = e^{-t^2}$ в узком смысле неразрешимо, так как выразить в элементарных функциях $\int e^{-t^2} dt$ невозможно (интеграл является "неберущимся"), но в широком смысле это уравнение интегрируемо в квадратурах. Частным решением данного уравнения

является функция $\int_0^t e^{-\tau^2} d\tau$, а общее решение может быть записано в виде

$$x(t) = \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau + C.$$

Следует отметить, что уравнения, интегрируемые в квадратурах, в частности, в элементарных функциях, составляют лишь незначительную часть всех ОДУ. Например, очень важное в приложениях уравнение Бесселя $t^2 x'' + tx' + (t^2 - n^2)x = 0$ в общем случае не интегрируется в квадратурах. Для интегрирования уравнений такого типа используются методы представления решения в виде ряда (см. разд. 7.1). Вообще даже не любое уравнение первого порядка интегрируется в квадратурах. Так, простейшее по виду

уравнение $x' = t^2 + x^2$ не интегрируется ни в элементарных функциях, ни в квадратурах. Однако для некоторых частных видов правой части уравнения (1.4) и системы (1.11) удастся получить аналитическое решение задачи. Методы, используемые в таких случаях, изложены в разд. 2-5.

2. Сведение ДУ n -го порядка к системе ДУ. Дифференциальное уравнение n -го порядка, разрешенное относительно старшей производной, можно свести к системе n уравнений первого порядка в нормальной форме. Действительно, уравнение

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0, \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)},$$

с помощью обозначений: $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = x'(t)$, ..., $x_n(t) = x^{(n-1)}(t)$ сводится к следующей системе в нормальной форме с соответствующими начальными условиями:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, & x_1(t_0) = x_0, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3, & x_2(t_0) = x'_0, \\ \dots & \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f(t, x_1, \dots, x_n), & x_n(t_0) = x_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Напомним, что данный прием уже был использован при переходе от уравнения (В.7) к системе (В.8).

Для решения обратной задачи можно продифференцировать по t первое уравнение последней системы $n-1$ раз, учитывая, что x_i , $i = 1, \dots, n$, являются функциями переменной t , и заменяя после каждого дифференцирования производные $x_1', x_2', \dots, x_n'$ их выражениями из системы.

Пример 1.6. Привести систему

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 \end{cases}$$

к соответствующему дифференциальному уравнению.

Решение. Продифференцируем по t первое уравнение: $\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt}$ и, используя второе уравнение системы, получаем дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $x_1(t)$:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 = 0.$$

Приведение уравнения к равносильной системе в некоторых случаях упрощает нахождение общего решения или решение задачи Коши. Кроме того, этот прием позволяет не проводить доказательства многих теорем, не изучать свойства решений отдельно для уравнений и для систем (см. например, линейные уравнения и линейные системы). Таким образом, имеется возможность сводить задачи исследования свойств уравнений n -го порядка и поведения их решений к изучению того же вопроса для систем. Обратная задача также может оказаться практически полезной, как, например, в приведенном примере 1.6.

3. Поле направлений. Метод изоклин. Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, записывается, как следует из (1.4) при $n = 1$, в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (1.19)$$

Это уравнение устанавливает связь между координатами точки (t, x) и угловым коэффициентом $\frac{dx}{dt}$ касательной, проведенной к интегральной кривой в этой точке:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (1.20)$$

В каждой точке области, где определена функция $f(t, x)$, проведем вектор единичной длины, образующий с осью Ot угол $\operatorname{arctg} \frac{dx}{dt}$ (положительное направление вектора можно взять произвольным, так как арктангенс определяет угол лишь с точностью до кратного π). Полученная в результате совокупность указателей называется *полем направлений*. Следовательно, уравнение (1.19) геометрически выражает тот факт, что направление касательной в каждой точке любой интегральной кривой совпадает с направлением поля в этой точке.

Итак, для графического решения уравнения (1.19) требуется:

1. Построить поле направлений, достаточно густо накрыв область, в которой строится графическое решение. При этом удобно поле строить не хаотично, а выбирать точки (t, x) , где касательные к искомому интегральным кривым имеют одно направление, то есть $\operatorname{tg} \alpha = x' = \operatorname{const}$. Линии, образованные такими точками, называются *изоклинами*. Уравнение изоклин для уравнения (1.19) имеет вид

$$f(t, x) = C = \operatorname{const}. \quad (1.21)$$

2. Провести кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с указателями поля направлений. Эти кривые приближенно принимаются за интегральные кривые уравнения.

Сформулированный алгоритм называется *методом изоклин*.

З а м е ч а н и е 1.3. В дальнейшем (см. разд. 9.1) свойство (1.20) используется при выводе формул явного метода Эйлера для численного решения уравнений.

Пример 1.7. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = t^2 + x^2.$$

Решение. Как отмечено в п.1 данного раздела, это уравнение не интегрируется в квадратурах и получить точное аналитическое выражение для его решения невозможно. Метод изоклин позволяет найти решение этого уравнения приближенно.

1. Составим уравнение изоклин:

$$f(t, x) = t^2 + x^2 = C = \text{const}.$$

Это уравнение семейства concentрических окружностей с центром в точке $(0,0)$ и радиусом $R = \sqrt{C}$. Построим поле направлений (рис.1.5) при $C = 1/4, C = 1, C = 4$.

2. Проведем кривые так, чтобы расставленные на поле направлений векторы показывали в каждой точке направление касательной к проходящей через эту точку кривой.

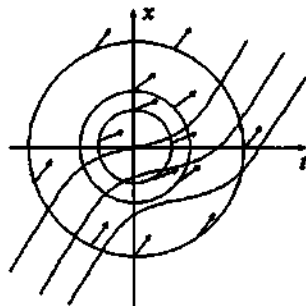


Рис.1.5

4. Свойства решений линейных дифференциальных уравнений и систем. Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение n -го порядка:

$$a_n(t) x^{(n)} + a_{n-1}(t) x^{(n-1)} + \dots + a_1(t) x' + a_0(t) x = f(t) \quad (1.22)$$

и соответствующее ему однородное уравнение:

$$a_n(t) x^{(n)} + a_{n-1}(t) x^{(n-1)} + \dots + a_1(t) x' + a_0(t) x = 0, \quad (1.23)$$

где коэффициенты $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_1(t), a_0(t)$ и функция $f(t)$ непрерывны на некотором промежутке (a, b) . Из теоремы 1.1 следует, что решение задачи Коши для уравнения (1.22) существует и единственно, а особых решений нет.

Теория линейных уравнений (линейная теория) представляет собой наиболее развитую часть теории ОДУ. Прежде всего это вызвано тем обстоятельством, что линейные уравнения и системы линейных уравнений обладают некоторыми особыми свойствами, которые облегчают нахождение и исследование их решений. Кроме того, интерес к разработке линейной теории является следствием ее многочисленных приложений. Оказывается, что на практике линейные уравнения и системы либо описывают реальные физические системы (см. примеры В.1-В.4), либо дают их так называемые первые приближения, и во многих случаях по этому первому приближению можно составить представление о характере изучаемого явления. Для получения первого приближения обычно применяется процедура линеаризации, то есть приближенная замена нелинейного уравнения линейным в окрестности некоторого решения, называемого в этом случае опорным [22].

Из свойств линейности левых частей уравнений (1.22), (1.23) и операции дифференцирования следует ряд важных положений, сформулированных ни-

же в виде теорем. Эти положения непосредственно используются в разд. 3 и 4 при решении конкретных примеров.

ТЕОРЕМА 1.3. (О структуре общего решения неоднородного уравнения (1.22)).

Если $x_n(t)$ - некоторое частное решение уравнения (1.22), а $x_0 = x_0(t, C_1, \dots, C_n)$ - общее решение соответствующего однородного уравнения (1.23), то общее решение неоднородного уравнения представляется их суммой:

$$x(t) = x_0(t, C_1, \dots, C_n) + x_n(t). \quad (1.24)$$

З а м е ч а н и е 1.4. Если правая часть уравнения (1.22) может быть представлена в виде суммы нескольких функций:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_m(t)$$

и $x_{ni}(t)$, $i = 1, \dots, m$, - некоторые частные решения уравнений

$$a_n(t) x^{(n)} + a_{n-1}(t) x^{(n-1)} + \dots + a_1(t) x' + a_0(t) x = f_i(t), \quad i = 1, \dots, m,$$

соответственно, то сумма

$$x_n(t) = x_{n1}(t) + x_{n2}(t) + \dots + x_{nm}(t)$$

является частным решением уравнения (1.22).

ТЕОРЕМА 1.4. (О структуре общего решения однородного уравнения (1.23)).

Если $x_1(t), \dots, x_n(t)$ - n линейно независимых на промежутке (a, b) частных решений однородного уравнения (1.23), то общее решение однородного уравнения (1.23) представляется в виде

$$x_0(t, C_1, \dots, C_n) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \dots + C_n x_n(t), \quad a < t < b, \quad (1.25)$$

где $C_1, \dots, C_n$ - произвольные постоянные.

Совокупность n линейно независимых на промежутке (a, b) решений $x_1(t), \dots, x_n(t)$ однородного уравнения (1.23) называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

Напомним, что функции $x_1(t), \dots, x_n(t)$ называются *линейно независимыми* на (a, b) , если тождество

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \dots + \alpha_n x_n(t) = 0, \quad a < t < b \quad (1.26)$$

выполняется лишь в случае, когда все $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Это означает, что ни одна из указанных функций не является линейной комбинацией других для всех t из промежутка (a, b) .

ТЕОРЕМА 1.5. (Следствие теорем 1.3, 1.4).

Если $x_n(t)$ - некоторое частное решение уравнения (1.22), а функции $x_1(t), \dots, x_n(t)$ образуют фундаментальную систему решений однородного урав-

нения (1.23), то общее решение неоднородного уравнения (1.22) представляется в виде

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \dots + C_n x_n(t) + x_0(t), \quad (1.27)$$

где $C_1, \dots, C_n$ - произвольные постоянные.

На основании теоремы 1.5 может быть сформулирован следующий алгоритм решения задачи Коши для линейного неоднородного уравнения n -го порядка:

$$\begin{aligned} a_n(t) x^{(n)} + a_{n-1}(t) x^{(n-1)} + \dots + a_1(t) x' + a_0(t) x &= f(t), \\ x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) &= x_0^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Алгоритм решения задачи Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка

1. Найти общее решение соответствующего однородного уравнения (1.23):

$$x_0(t) = x_0(t, C_1, \dots, C_n) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \dots + C_n x_n(t).$$

2. Найти некоторое частное решение $x_0(t)$ неоднородного уравнения (1.22).

3. Записать общее решение неоднородного уравнения (1.22) в виде суммы результатов пп.1 и 2:

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \dots + C_n x_n(t) + x_0(t).$$

4. Найти частное решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее заданным в задаче Коши (1.28) начальным условиям.

З а м е ч а н и е 1.5. Утверждения, аналогичные теоремам 1.3-1.5, и приведенный алгоритм решения задачи Коши, справедливы и для линейной неоднородной системы (1.14) и соответствующей однородной системы (1.16), если равенства (1.24)-(1.27) понимать в векторном смысле.

5. Анализ выходных процессов. Во введении была сформулирована задача анализа выходных процессов, то есть задача нахождения выходного сигнала по известному входному сигналу, начальным условиям и описанию системы (см. рис.В.5). Рассмотрим постановки задач анализа выходных процессов для линейных одномерных и многомерных динамических систем [33].

Постановка задачи анализа выходных процессов для одномерных линейных систем

Д а н о :

- а) входной сигнал $g(t)$;
- б) описание модели динамической системы в виде линейного неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка:

$$\begin{aligned} a_n(t) x^{(n)} + a_{n-1}(t) x^{(n-1)} + \dots + a_1(t) x' + a_0(t) x &= \\ = b_m(t) g^{(m)}(t) + b_{m-1}(t) g^{(m-1)}(t) + \dots + b_1(t) g'(t) + b_0(t) g(t); \end{aligned} \quad (1.29)$$

в) начальные условия:

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}. \quad (1.30)$$

Т р е б у е т с я н а й т и : выходной сигнал $x(t)$.

В условиях задачи $a_n(t), \dots, a_0(t), b_m(t), \dots, b_0(t)$ - заданные непрерывные функции, t_0 - момент подачи входного сигнала в систему. Заметим, что в реальных динамических системах предполагается $m \leq n$.

Сформулированной постановке задачи соответствует рассмотренный выше пример В.2, если в (В.2) ввести обозначения:

$$u_{\text{вх}} = x, \quad u_{\text{вых}} = g, \quad a_1(t) = RC, \quad a_0(t) = 1 + R_T, \quad b_1(t) = RC, \quad b_0(t) = 1.$$

Постановка задачи анализа выходных процессов многомерных линейных систем

Д а н о :

$$\text{а) входной сигнал } G(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_r(t) \end{pmatrix};$$

б) описание модели динамической системы в виде *уравнения состояния*:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t)G(t), \quad (1.31)$$

где $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ - вектор состояния; $A(t), B(t)$ - матрицы размера $(n \times n)$ и $(n \times r)$ соответственно, образованные непрерывными функциями $a_{ij}(t), b_{ij}(t)$, и *уравнения выхода*:

$$Y(t) = C(t)X(t), \quad (1.32)$$

где $Y = (y_1, \dots, y_k)^T$ - вектор выхода, $C(t)$ - матрица размера $(k \times n)$;

в) начальные условия:

$$X(t_0) = X_0, \quad (1.33)$$

где $X_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})^T$, t_0 - момент подачи входного сигнала в систему.

Т р е б у е т с я н а й т и : закон изменения вектора состояния $X(t)$ и выходного сигнала $Y(t)$.

Сформулированной постановке задачи соответствует рассмотренный выше пример В.5, если в (В.8) ввести обозначения:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i \\ u_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ u_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/L \\ 0 \end{pmatrix} a(t); \quad \begin{pmatrix} i(0) \\ u_c(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$X \qquad A(t) \qquad X \qquad B(t) \quad G(t) \quad X(0) \quad X_0$

$$Y(t) = X(t), \text{ то есть } C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая (1.29), (1.30) с (1.28), а (1.31), (1.33) с (1.14), (1.17), можно заключить, что решение задачи анализа выходных процессов сводится к решению задачи Коши, если принять:

$$f(t) = b_m(t) g^{(m)}(t) + b_{m-1}(t) g^{(m-1)}(t) + \dots + b_1(t) g'(t) + b_0(t) g(t), \quad F(t) = B(t) G(t),$$

то есть трактовать наличие функций $f(t)$, $F(t)$ как следствие наличия входного сигнала.

Для линейных систем справедлив *принцип суперпозиции*: результат, вызываемый суммой нескольких воздействий, равен сумме результатов от каждого воздействия в отдельности. При этом под внешним воздействием понимаются как начальные условия, так и входной сигнал (см. рис. В.5 и В.6). Следствиями принципа суперпозиции являются равенство (1.24) и выводы, содержащиеся в замечании 1.3.

Решение задачи Коши на основании (1.24) можно находить двумя способами. Первый способ описан в п.5 данного раздела в виде алгоритма. Вторым способ заключается в следующем. Сначала ищется общее решение однородного уравнения и частное решение $x_p(t)$ неоднородного уравнения, удовлетворяющее нулевым начальным условиям, то есть выясняется влияние входного сигнала или функции $f(t)$. Произвольные постоянные $C_1, \dots, C_n$, входящие в запись общего решения однородного уравнения $x_h(t, C_1, \dots, C_n)$, ищутся из условия удовлетворения им начальных условий (при этом выясняется влияние начальных условий, так как $f(t) = 0$ или $g(t) = 0$). Наконец, решение задачи представляется в виде суммы:

$$x(t) = x_{св}(t) + x_{вын}(t), \quad (1.34)$$

где $x_{св}(t)$ - свободное движение системы, $x_{вын}(t)$ - вынужденное движение системы.

Свободное движение $x_{св}(t)$ происходит при отсутствии внешнего воздействия ($f(t) = 0$ или $g(t) = 0$) вследствие ненулевых начальных условий. Оно определяется решением однородного уравнения, соответствующего исходному уравнению системы. В случае, когда начальные условия нулевые, свободное движение системы отсутствует.

Вынужденное движение $x_{вын}(t)$ - это реакция системы на внешнее воздействие при нулевых начальных условиях. Оно определяется решением неоднородного уравнения при нулевых начальных условиях.

Алгоритм анализа выходных процессов

1. Найти свободное движение системы $x_{св}(t)$.
2. Найти вынужденное движение системы $x_{вын}(t)$.
3. Записать выходной сигнал по формуле (1.34) в виде суммы свободного и вынужденного движений.

З а м е ч а н и е 1.6. Аналогичные определения и алгоритм справедливы и для многомерных систем, то есть

$$X(t) = X_{св}(t) + X_{вын}(t),$$

где свободное движение $X_{св}(t)$ определяется решением однородной системы уравнений ($R(t) = 0$ или $G(t) = 0$)

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X, \quad X(t_0) = X_0,$$

а вынужденное движение $X_{вын}(t)$ - решением неоднородной системы (1.31) при нулевых начальных условиях. При этом, учитывая (1.32), можно найти закон изменения выходного сигнала:

$$Y(t) = Y_{св}(t) + Y_{вын}(t) = C(t)X_{св}(t) + C(t)X_{вын}(t).$$

6. Анализ устойчивости. Задача анализа выходных процессов связана с получением количественных характеристик процессов, происходящих в динамических системах. Задача анализа устойчивости формулируется для выяснения качественных особенностей поведения этих систем.

Пусть поведение динамической системы описывается системой дифференциальных уравнений в нормальной форме (1.11) с начальными условиями (1.17).

Решение $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))^T$ системы (1.11) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого числа $\epsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\epsilon) > 0$, что для всякого решения $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ той же системы, начальные значения которого удовлетворяют неравенствам:

$$|x_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\epsilon), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.35)$$

для всех $t \geq t_0$ выполняются неравенства

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \epsilon, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если для некоторого $\epsilon > 0$ такого $\delta(\epsilon)$ не существует, то решение $\Phi(t)$ называется *неустойчивым*.

Понятие устойчивости иллюстрируется графиком на рис.1.6.

Если решение $\Phi(t)$ не только устойчиво по Ляпунову, но и таково, что для всех решений, достаточно близких к $\Phi(t)$ по начальным условиям, то есть решений, удовлетворяющих (1.35), выполняются соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

то это решение называется *асимптотически устойчивым*.

Свойство устойчивости определяется поведением свободного движения системы при различных начальных условиях.

Пример 1.8. Исследовать на устойчивость решение $x(t) = \varphi(t) = 0$ уравнения $x' = ax$, $x(0) = x_0$.

Решение. Подстановкой можно проверить, что общее решение уравнения

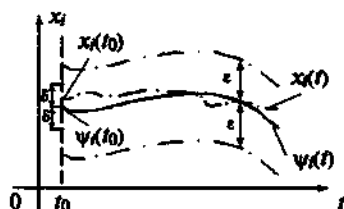


Рис.1.6

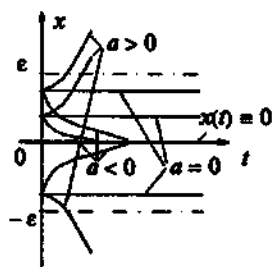


Рис.1.7

имеет вид $x(t) = Ce^{at}$, а частное решение: $x(t) = x_0 e^{at}$, где x_0 - заданное число.

Поскольку $\varphi(t) = 0$, $t_0 = 0$, то в определении устойчивости решения: $n = 1$, $\varphi_1(t_0) = \varphi_1(0) = 0$ и $\varphi_1(t) = 0$. Пусть начальное значение x_0 удовлетворяет условию $|x(0) - \varphi_1(0)| = |x_0| < \delta = \varepsilon > 0$. Тогда $|x(t) - \varphi_1(t)| = |x_0 e^{at}| = |x_0| e^{at}$.

При $a > 0$, $t \rightarrow +\infty \lim_{t \rightarrow +\infty} |x_0| e^{at} = +\infty$, то есть решение неустойчиво.

При $a < 0$ $|x(t) - \varphi_1(t)| = |x_0| e^{at} \leq |x_0| < \varepsilon$, то есть решение устойчиво по Ляпунову. Кроме того, оно асимптотически устойчиво, так как

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - \varphi_1(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |x_0| e^{at} = 0.$$

При $a = 0$ $|x(t) - \varphi_1(t)| = |x_0| < \varepsilon$, то есть решение устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически устойчиво, так как

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - \varphi_1(t)| = |x_0| \neq 0 \text{ при } x_0 \neq 0.$$

Все рассмотренные случаи изображены на рис.1.7.

1.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Проверить, является ли решением заданного уравнения первого порядка соответствующая функция.

а) $x'x = t$, 1) $x(t) = \sqrt{t^2 + 1}$, 2) $x(t) = \sqrt{t^2 + 1} + C$, 3) $x(t) = \sqrt{t^2 + C}$;

б) $x' + 3x = e^{2t}$, 1) $x(t) = e^{-3t} + \frac{1}{5} e^{2t}$, 2) $x(t) = e^{2t} + C e^{-3t}$,

3) $x(t) = C e^{-3t} + \frac{1}{5} e^{2t}$;

$$в) (t-x)x \, dt = t^2 dx, \quad 1) x(t) = \frac{t}{\ln t}, \quad 2) t - e^{t/x} + C = 0, \quad (C \neq 0), \quad 3) t - Ce^{t/x} = 0;$$

$$г) x' + x^2 = \frac{2}{t^2}, \quad 1) x(t) = \frac{2}{t}, \quad 2) x(t) = \frac{2}{t} + C, \quad (C \neq 0), \quad 3) x(t) = \frac{3t^2}{t^3 + C} - \frac{1}{t}.$$

Ответ: 1), 3) - да; 2) - нет. См. п.2 примечания.

2. Проверить, является ли решением заданного уравнения первого порядка соответствующая функция, заданная параметрически: $\begin{cases} t = t(p), \\ x = x(p). \end{cases}$

$$а) (1+tx)x' + x^2 = 0, \quad \begin{cases} t = pe^p, \\ x = e^{-p}; \end{cases}$$

$$б) t^2 + x'^2 = 1, \quad \begin{cases} t = \sin p, \\ x = p/2 + \frac{\sin 2p}{4} + C. \end{cases}$$

Указание: применить правило дифференцирования функции, заданной параметрически, или использовать запись уравнения в виде:

$$f(x,t)dx + \varphi(x,t)dt = 0.$$

3. Доказать, что следующие функции, заданные неявно равенствами $F(x,t) = 0$, являются решениями соответствующих уравнений.

$$а) x^2 + t^2 - 2Ct = 0, \quad x^2 - t^2 - 2txx' = 0;$$

$$б) (1+x^3)^2 - (1+t^2)^3 = 0, \quad x' = \frac{t(1+x^3)}{x^2(1+t^2)}.$$

Указание: применить правило дифференцирования функции, заданной неявно, или использовать запись уравнения в виде: $f(x,t)dx + \varphi(x,t)dt = 0$.

4. Проверить, являются ли решениями уравнения $x' + \frac{t}{x} = 0$ следующие функции:

$$1) x(t) = \sqrt{1-t^2}, \quad 2) \begin{cases} t = R \cos p, \\ x = R \sin p; \end{cases} \quad 3) x^2 + t^2 = C.$$

Ответ: являются.

5. Доказать, что следующие неэлементарные функции $x(t)$, заданные в виде "неберущихся" интегралов, являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений.

$$а) x(t) = t \int_0^t \frac{\sin u}{u} du, \quad tx' = x + t \sin t;$$

$$б) x(t) = e^t \int_0^t e^{-u^2} du + Ce^t, \quad C - \text{любое}, \quad x' - x = e^t + t^2.$$

Указание: применить правило дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом.

6. Пусть $x = \varphi(t)$ - интегральная кривая дифференциального уравнения $x' = t^3x + e^{2t}$, проходящая через точку $(0, 1)$. Найти $\varphi^{IV}(0)$.

Ответ: $\varphi^{IV}(0) = 14$.

Указание: продифференцировать три раза заданное равенство.

7. Доказать, что следующие функции являются решениями уравнения второго порядка $x'' = t + \sin t$.

а) $x(t) = 2t + t^{3/6} - \sin t$; б) $x(t) = 2t + t^{3/6} - \sin t + C$; в) $x(t) = t^{3/6} - \sin t + Ct$;

г) $x(t) = t^{3/6} - \sin t + Ct + 5$; д) $x(t) = t^{3/6} - \sin t + C_1t + C_2$.

Определяет ли какая-либо из совокупностей "б", "в", "г" общее решение этого уравнения?

Ответ: нет.

8. Доказать, что решение $x(t) = t^{3/3} - \sin t + C_1t + C_2$ является общим решением уравнения $x'' = t + \sin t$.

Указание: признак того, что данная совокупность является общим решением уравнения - возможность решения задачи Коши для этого уравнения при любых заданных начальных условиях.

9. Доказать, что для уравнения из задачи 7 функция а) является решением задачи Коши с начальными условиями $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, а функция в) при $C \neq 2$ не является решением этой задачи.

10. Имеет ли уравнение $x' = (x - t)^{2/3} + a$ особые решения?

Ответ: при $a \neq 1$ особых решений нет; при $a = 1$ особое решение $x(t) = t$. См. примечание.

11. Имеет ли уравнение $x' = (t - 5x)^{1/3} + 2$ особые решения?

Ответ: нет.

12. Является ли решением задачи Коши для уравнения $x' = -\frac{1}{x}$ и начального условия $x(0) = x_0$ функция $x_1(t) = \sqrt{1 - t^2}$, $x_2(t) = -\sqrt{1 - t^2}$, если

а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = -1$.

Ответ: а) $x_1(t)$ - решение, $x_2(t)$ - нет; б) $x_2(t)$ - решение, $x_1(t)$ - нет.

П р и м е ч а н и я.

1. Уравнения, предложенные в задачах 1-12, можно решить, используя методы, рассмотренные далее в гл. 2. После изучения гл. 2 определите типы этих уравнений и укажите методы их решения.

2. Во всех случаях задачи 1 под номером 3 даны общие решения соответствующих уравнений.

3. К задаче 8. Для доказательства утверждения нужно показать, что произвольные постоянные, входящие в совокупность, могут быть однозначно определены при любых начальных условиях. Для уравнения второго порядка начальные условия задаются в виде: $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x'_0$. Используя эти условия (подставляя $t = t_0$ в выражения для $x(t)$ и $x'(t)$), получаем:

$$\begin{cases} \frac{t_0^3}{6} - \sin t_0 + C_1 t_0 + C_2 = x_0, \\ \frac{t_0^2}{2} - \cos t_0 + C_1 = x'_0. \end{cases}$$

Из этой системы постоянные C_1, C_2 определяются однозначно.

Эту же задачу можно решить иначе. Поскольку предложенное уравнение является линейным уравнением, то можно использовать теоремы 1.3-1.5. Для этого запишем совокупность $x(t, C_1, C_2)$ в виде $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$, где

$x_0(t) = C_1 t + C_2$, $x_1(t) = \frac{t^3}{6} - \sin t$. Проверкой убеждаемся, что $x_1(t)$ является решением данного линейного неоднородного уравнения, а $x_0(t)$ - решением соответствующего однородного уравнения $x'' = 0$. Кроме того, функции $x_1(t) = t$ и $x_2(t) = 1$ образуют фундаментальную систему решений, так как они линейно независимы. Поэтому, согласно теореме 1.4, их линейная комбинация $x_0(t) = C_1 t + C_2 \cdot 1$ является общим решением линейного однородного уравнения $x'' = 0$, а согласно теореме 1.3, совокупность $x(t, C_1, C_2) = x_0(t) + x_1(t)$ является общим решением рассматриваемого линейного неоднородного уравнения.

4. Решение задачи 10. Проверим для уравнения $x' = f(x, t)$, где $f(x, t) = (x - t)^{2/3} + a$, условия теоремы 1.1. Функция $f(x, t)$ определена и непрерывна в любой области D , поэтому в силу замечания 1.1 решение существует. Функция $f'_x = \frac{2}{3(t-x)^{1/3}}$ не является ограниченной на прямой $x = t$ (то есть в точках этой прямой нарушаются условия теоремы 1.1). Поэтому в точках прямой $x = t$ решение задачи Коши для заданного начального условия $x(t_0) = x_0$ может быть неединственным. Но при $a \neq 1$ функция $x(t) = t$ не является решением уравнения. Следовательно, уравнение при $a \neq 1$ не имеет особых решений. Если же $a = 1$, то функция $x(t) = t$ является особым решением.

Отметим также, что уравнение $x' = (x - t)^{2/3} + 1$ можно решить методом, изложенным в гл.2 (см. разд.2.1), как уравнение, приводящееся к уравнению с разделяющимися переменными. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = t + \frac{(t - C)^3}{27}.$$

Отсюда видно, что через любую точку прямой $x = t$, кроме этой прямой, проходит еще одна кривая из записанного семейства, являющаяся интегральной кривой уравнения.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка

2.1. Уравнения с разделяющимися переменными

2.1.1. Метод решения

В данном разделе рассматриваются уравнения вида

$$x' = f(t, x). \quad (2.1)$$

Представляя правую часть уравнения (2.1) в виде дроби $f(t, x) = -\frac{N(t, x)}{M(t, x)}$, получаем симметричную запись уравнения (2.1) (в форме дифференциалов):

$$M(t, x)dx + N(t, x)dt = 0. \quad (2.2)$$

Всюду далее будем предполагать, что функции $f(t, x)$, $M(t, x)$, $N(t, x)$ непрерывны в некоторой области изменения переменных t, x .

Отметим, что уравнения (2.1) и (2.2) равносильны (то есть имеют одинаковые решения) в области, где $M(t, x) \neq 0$. По этой причине в дальнейшем при переходе от уравнения (2.1) к (2.2) из множества решений уравнения (2.2) будем исключать решения, на которых $M(t, x) = 0$, и наоборот, при переходе от (2.2) к (2.1) - к решениям уравнения (2.1) будем добавлять решения, на которых $M(t, x) = 0$.

В зависимости от вида и свойств функций $f(t, x)$, $M(t, x)$, $N(t, x)$ среди уравнений первого порядка можно провести некоторую классификацию, выделив типы уравнений, интегрируемых в квадратурах, и указать методы их решения.

Уравнение (2.2) называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если каждую из функций двух переменных $M(t, x)$, $N(t, x)$ при помощи алгебраических преобразований можно представить в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной: $M(t, x) = f_1(t) f_2(x)$, $N(t, x) = \varphi_1(t) \varphi_2(x)$.

Следовательно, уравнение с разделяющимися переменными может быть записано как

$$f_1(t) f_2(x) dt + \varphi_1(t) \varphi_2(x) dx = 0. \quad (2.3)$$

Полагая $f_2(x) \neq 0$, $\varphi_1(t) \neq 0$, разделим обе части (2.3) на $f_2(x) \varphi_1(t)$. Тогда уравнение (2.3) примет вид

$$\frac{f_1(t)}{\varphi_1(t)} dt + \frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)} dx = 0. \quad (2.4)$$

Полученное уравнение (2.4) будем называть *уравнением с разделенными переменными*. Интегрируя (2.4) (существование интегралов обеспечено предположением о непрерывности функций):

$$\int \frac{f_1(t)}{\varphi_1(t)} dt + \int \frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)} dx = C, \quad (2.5)$$

получаем равенство $F_1(t) + F_2(x) = C$, которое можно записать как $\Phi(t, x, C) = 0$. Получен общий интеграл уравнения (2.3).

З а м е ч а н и е 2.1.

1. При разделении переменных могут быть потеряны решения уравнения (2.3). Рассмотрим исключенные при переходе от уравнения (2.3) к уравнению (2.4) случаи: $f_2(x) = 0$ и $\varphi_1(t) = 0$. Если уравнение $f_2(x) = 0$ имеет решение вида $x = a$, то, очевидно, функция $x(t) = a$ является решением уравнения (2.3), что проверяется непосредственной подстановкой. При этом решение $x(t) = a$ может входить в совокупность $\Phi(t, x, C) = 0$ при некотором значении C , включая $\pm\infty$, тогда оно является частным решением. Если же решение $x(t) = a$ не может быть получено из общего интеграла ни при каких C , то оно является особым решением и в ответе его нужно присоединить к общему интегралу. Аналогично проверяются решения уравнения $\varphi_1(t) = 0$.

2. Уравнения с разделяющимися переменными всегда интегрируются в квадратурах, поскольку (2.5) определяет общий интеграл уравнения с разделяющимися переменными. Если, кроме того, интегралы в (2.5) "берущиеся", то общий интеграл выражается в элементарных функциях. При анализе общего интеграла необходимо учитывать возможность наличия особых решений вида $f_2(x) = 0$ или $\varphi_1(t) = 0$.

3. Частными случаями уравнения с разделяющимися переменными являются уравнения вида

$$x' = f(t), \quad (2.6)$$

$$x' = f(x), \quad (2.7)$$

решения которых получаются непосредственным интегрированием. В первом случае $x(t) = \int f(t) dt + C$, во втором случае решение при $f(x) \neq 0$ получается из

равносильного уравнения $\frac{dx}{f(x)} - dt = 0$ в виде $\int \frac{dx}{f(x)} = t + C$.

Рассмотренный выше пример 1.2 является примером уравнения (2.7).

Пример 2.1. Решить дифференциальное уравнение:

$$x' = \frac{x}{t}, \quad t \neq 0.$$

Решение. При $x \neq 0$, разделяем переменные:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dt}{t}.$$

Интегрируя обе части последнего равенства, получаем $\ln|x| = \ln|t| + \ln C_1$. Заметим, что произвольную постоянную C , возникающую при интегрировании, в данном случае удобнее записать в виде $\ln C_1$. Очевидно, что при этом $C_1 > 0$, но поскольку $\ln C_1$ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, то постоянная $C = \ln C_1$ может принимать любые значения. Потенцируя полученное равенство, получаем $|x| = C_1|t|$ или, после раскрытия модуля, $x = \pm C_1 t$. Поскольку величина $\pm C_1$ может принимать любое не равное нулю значение, то решение можно записать в виде $x(t) = Ct$, $C \neq 0$. "Потерянное" при разделении переменных решение $x(t) = 0$ входит в совокупность $x(t) = Ct$, при $C = 0$, а значит, не является особым. Таким образом, общее решение рассматриваемого уравнения имеет вид $x(t) = Ct$, где C может принимать любые значения (см. пример 1.1, рис.1.1).

Пример 2.2. Решить дифференциальное уравнение:

$$t(1-x^2) dt - x(1-t^2) dx = 0.$$

Решение. При $x \neq \pm 1$ и $t \neq \pm 1$ разделяем переменные: $\frac{x}{1-x^2} dx = \frac{t}{1-t^2} dt$.

Интегрируя обе части полученного равенства,

$$\frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{1-x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1-t^2)}{1-t^2},$$

получаем $\ln|1-x^2| = \ln|1-t^2| + \ln C_1$, $C_1 > 0$. Потенцируя и используя свойства модуля, запишем последнее равенство в виде $1-x^2 = \pm C_1(1-t^2)$. Учитывая, что $\pm C_1$ может принимать любые не равные нулю значения, получаем окончательно $1-x^2 = C(1-t^2)$, $C \neq 0$ - уравнение семейства интегральных кривых. При разделении переменных могли быть потеряны решения вида $x = \pm 1$, $t = \pm 1$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что это частные решения, которые входят в полученную совокупность семейства интегральных кривых при $C = 0$ - первые и при $C = \infty$ - вторые, так как справедливо

равенство $\frac{1-x^2}{C} = 1-t^2$. Итак, общий интеграл исходного уравнения имеет вид $x^2 + C(1-t^2) - 1 = 0$.

Заметим, что решения $t = \pm 1$ в силу симметрии рассматриваемого уравнения входят при $C = 0$ в совокупность $1-t^2 = C(1-x^2)$, которую можно получить, если при нахождении первообразных положить $C = -\ln C_1$.

Отметим также, что если бы исходное уравнение было бы записано в виде (2.1), то есть $x' = \frac{t(1-x^2)}{x(1-t^2)}$, то общий интеграл имел бы вид $x^2 + C(1-t^2) - 1 = 0$, $C \neq 0$, а $t = \pm 1$ не являлось бы решением.

Пример 2.3. Найти все решения дифференциального уравнения:

$$x' + \sin(t+x) = \sin(t-x).$$

Решение. Запишем уравнение в виде (2.1), то есть $x' = \sin(t-x) - \sin(t+x)$, и разложим правую часть на множители. Такое преобразование приводит к уравнению с разделяющимися переменными: $x' = -2 \sin x \cos t$. Полагая $\sin x \neq 0$, разделяем переменные и интегрируем обе части полученного равенства: $\int \frac{dx}{2 \sin x} = - \int \cos t \, dt$. Первообразная слева определяется при помощи универсальной подстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$, или следующим образом:

$$\int \frac{dx}{2 \sin x} = \int \frac{d \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{d \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2}|.$$

Решение исходного уравнения получено в виде $\frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| + \sin t = \frac{1}{2} C$. "Потерянные" при разделении переменных решения $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, ($\sin x = 0$) являются частными, так как входят в полученную совокупность при $C = \infty$ ($\operatorname{tg} \frac{x}{2} = e^{C - 2 \sin t}$), поэтому выражение $\ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| + 2 \sin t - C = 0$ задает общий интеграл исходного уравнения. Если положить $C = \ln C_1$, то полученное решение можно записать в виде $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = C_1 e^{-2 \sin t}$.

Пример 2.4. Решить задачу Коши:

$$x' = 3tx^{1/3}, \quad x(-1) = -1.$$

Решение. При $x \neq 0$ разделяем переменные: $\frac{dx}{x^{1/3}} = 3t \, dt$. Интегрируя полученное равенство, находим семейство интегральных кривых: $\frac{3}{2} x^{2/3} = \frac{3}{2} t^2 + \frac{3}{2} C$ или $x^{2/3} = t^2 + C$. При разделении переменных было потеряно решение $x(t) = 0$, которое не входит в найденное семейство ни при каком значении C , включая $\pm \infty$, следовательно, это особое решение уравнения. Таким образом, общее решение уравнения определяется равенствами $x^2 = (t^2 + C)^3$, $x = 0$. Из начального условия $x(-1) = -1$ и уравнения семейства интегральных кривых находим, что $C = 0$, а значит, решение исходной задачи Коши $x(t) = t^3$ (заметим, что функция $x(t) = -t^3$ не удовлетворяет начальному условию). Но оказывается, что это только одно из решений поставленной задачи (см. пример 1.2). Действительно, рассмотрим условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши (теорема 1.1). Поскольку функция $f(t, x) = 3tx^{1/3}$ непрерывна на всей плоскости (t, x) , то из упомянутой теоремы следует, что решение задачи Коши существует при любых начальных условиях, в частности, на любом промежутке, содержащем точку $t_0 = -1$. Но решение может быть не единственным (см. замечание 1.1). Проверив второе условие теоремы 1.1, находим производную $f'_x(t, x) = tx^{-2/3}$ и замечаем, что она не является ограниченной функцией в окрестности точки $x = 0$. Таким образом, во всех точках оси Ot нарушаются условия теоремы 1.1. Решение задачи для рассматриваемого уравнения оказывается единственным лишь на промежутке $(-\infty, 0)$, а в любом промежутке $(-\infty, t_0)$, $t_0 > 0$ - решение неединственно. Таким образом, рассматриваемая в данном приме-

ре задача Коши имеет единственное решение $x_1(t) = t^3$ лишь при $t \in (-\infty, 0)$, а в любой области $(-\infty, t_0)$, $t_0 > 0$ - неединственно. Например, решениями поставленной задачи являются следующие функции:

$$x_1(t) = t^3, \quad x_2(t) = \begin{cases} t^3, & t \leq 0 \\ -t^3, & t > 0 \end{cases}, \quad x_3(t) = \begin{cases} t^3, & t \leq 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases},$$

и вообще, любая функция вида

$$x(t) = \begin{cases} t^3, & t \leq 0 \\ \pm \sqrt{(t^2 + C)^3}, & t > 0. \end{cases}$$

Через любую точку $(t_0, 0)$, где $t_0 \geq 0$, проходит бесконечное множество интегральных кривых, составленных из $x(t) = t^3$, $t < 0$, $x(t) = 0$ и $x(t) = \pm \sqrt{(t^2 + C)^3}$, где C - любое число.

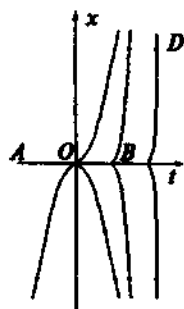


Рис.2.1

Полученное решение задачи иллюстрируется рис.2.1. Указанные интегральные кривые проходят через точки A, O, B, D при различных B, D , причем B может совпадать с O (сравните рис.2.1 с рис.1.2).

2.1.2. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

Рассмотрим уравнения вида

$$x' = f(at + bx + d), \quad (2.8)$$

где a, b, d - постоянные. Если $b = 0$, то это уравнение есть уравнение (2.6), рассмотренное выше. Полагая $b \neq 0$, введем новую функцию: $u = u(t)$,

$u = at + bx + d$. Тогда $x' = \frac{(u' - a)}{b}$ и уравнение (2.8) преобразуется к виду $u' = a + bf(u)$, то есть указанная замена приводит уравнение (2.8) к уравнению вида (2.7) $u' = \varphi(u)$.

Такой же прием (метод замены) применяется и для более общего класса уравнений, а именно

$$x' = f\left(\frac{a_1 t + b_1 x + d_1}{a_2 t + b_2 x + d_2}\right), \quad (2.9)$$

если параметры удовлетворяют условию $a_1 b_2 = b_1 a_2$. Заметим, что при $b_1 = 0$ и $b_2 = 0$ уравнение (2.9) относится к рассмотренному выше типу (2.6).

Рассмотрим случай, когда или $b_1 \neq 0$, или $b_2 \neq 0$. Пусть для определенности $b_1 \neq 0$ (рассуждения, аналогичные приведенным ниже, возможны и при $b_2 \neq 0$). Если при этом $a_1 = 0$, то из условия $a_1 b_2 = b_1 a_2$ следует $a_2 = 0$ и уравнение (2.9) в этом случае принимает вид (2.7).

Пусть в (2.9) $b_1 \neq 0$ и $a_1 \neq 0$. Проведем, как и в случае уравнения (2.8), замену $u = a_1 t + b_1 x + d_1$, тогда $x' = \frac{u' - a_1}{b_1}$. Кроме того, записывая условие $a_1 b_2 = b_1 a_2$ в виде $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \lambda$, получаем $a_2 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda b_1$, и знаменатель дроби в (2.9) можно записать так: $a_2 t + b_2 x + d_2 = \lambda u + d_2 - \lambda d_1 = \lambda u + d$. Таким образом, указанная замена приводит уравнение (2.9) к виду $u' = a_1 + b_1 f\left(\frac{u}{\lambda u + d}\right)$, то есть к уравнению $u' = \varphi(u)$ вида (2.7). Отметим, что при выполнении тех же условий можно сделать и замену $u = a_1 t + b_1 x$.

Пример 2.5. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения

$$2(t+x) dx + (3t + 3x - 1) dt = 0,$$

проходящую через точку $(0, 2)$.

Решение. Перепишем уравнение следующим образом:

$$x' = -\frac{3t + 3x - 1}{2(t+x)}.$$

Тогда видно, что, во-первых, рассматриваемое уравнение имеет вид (2.9), во-вторых, выполнено условие $a_1 b_2 = b_1 a_2$, так как $a_1 = 3$, $b_1 = 3$, $a_2 = -1$, $a_2 = 2$, $b_2 = 2$, $d_2 = 0$. Применяем далее замену $u = a_1 t + b_1 x = 3t + 3x$, причем проводим ее непосредственно для исходного уравнения:

$$t + x = \frac{u}{3}, \quad dx = \frac{du}{3} - dt, \quad \frac{2}{3}u\left(\frac{du}{3} - dt\right) + (u - 1)dt = 0.$$

Группируя слагаемые в последнем равенстве, получаем

$$2udu + 3(u - 3)dt = 0.$$

Разделяя переменные при $u \neq 3$ и интегрируя, имеем

$$\int \frac{2udu}{u-3} + 3 \int dt = C_1 \quad \text{или} \quad 2 \int \frac{u-3+3}{u-3} du + 3t = C_1.$$

Находим первообразную и получаем в итоге $2u + 6 \ln |u - 3| + 3t = C_1$. Решение $u(t) = 3$ входит в полученную совокупность при $C_1 = -\infty$, так как ее можно представить в виде $u - 3 = e^{C_1/6 - u/3 - t/2}$, поэтому полученное выражение является общим интегралом вспомогательного уравнения. Возвращаясь к исходным переменным ($u = 3x + 3t$), получаем $2(3x + 3t) + 6 \ln |3x + 3t - 3| + 3t = C_1$ или $2(x + t) + 2 \ln |x + t - 1| + 2 \ln 3 + t = C_1/3$. Окончательно общий интеграл исходного уравнения можно записать так: $2x + 3t + 2 \ln |x + t - 1| = C$.

Используя начальное условие $x(0) = 2$, находим значение постоянной C , $C = 4$ и выделяем из полученного семейства интегральную кривую $2x + 3t - 4 + 2 \ln |x + t - 1| = 0$, проходящую через точку $(0, 2)$.

Пример 2.6. Решить уравнение:

$$t^2 x'^2 + x^2 = 2t(2 - tx').$$

Решение. Данное уравнение не принадлежит к классу уравнений, рассматриваемых в этом разделе, поскольку оно не записывается в виде уравнения, разрешенного относительно производной x' . Однако, записав его в виде $t^2 x'^2 + 2txx' + x^2 = 4t$, можно заметить, что в левой части последнего равенства стоит полный квадрат двучлена $(tx' + x)$, причем $tx' + x = (tx)'$. Рассмотрим новую функцию $u = u(t)$, положив $u = tx$. Тогда исходное уравнение примет вид $u'^2 = 4t$ и его можно заменить двумя простейшими уравнениями $u' = 2\sqrt{t}$ и $u' = -2\sqrt{t}$. Интегрируя эти уравнения, находим их общие решения $u(t) = \pm \frac{4}{3} t^{3/2} - \frac{C}{3}$, где для удобства произвольная постоянная обозначена $-C/3$. Полученное общее решение можно представить в виде $(3u + C)^2 = 16t^3$ и, возвращаясь к исходным переменным ($u = tx$), получаем общий интеграл исходного уравнения: $(3tx + C)^2 - 16t^3 = 0$.

Рассмотрим теперь несколько простых задач прикладного характера, приводящих к дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными.

Пример 2.7. (Радиоактивный распад).

Известно, что скорость распада радия прямо пропорциональна имеющемуся его количеству $m(t)$ в текущий момент времени t . Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ имелось радия в количестве m_0 . Требуется определить закон изменения массы радия в зависимости от времени.

Решение. Условие задачи приводит к следующим соотношениям:

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha m, \quad \alpha > 0; \quad m(0) = m_0.$$

Интегрируя это уравнение с разделяющимися переменными, получаем его общее решение: $\ln m = -\alpha t + \ln C$ или $m(t) = Ce^{-\alpha t}$. Используя начальное условие $m(0) = m_0$, находим постоянную C , $C = m_0$. Таким образом, $m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$ - искомый закон изменения массы. Заметим, что из полученного решения следует, что $m(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

В приложениях часто используется термин "период полураспада" - время t_n , по истечении которого масса распадающегося вещества уменьшится вдвое, то есть $m(t_n) = \frac{m_0}{2}$. Полученное решение $m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$ позволяет легко определить эту величину, а именно $t_n = \frac{\ln 2}{\alpha}$.

Пример 2.8. (Формула Циолковского).

Получим уравнение, описывающее движение ракеты под действием силы тяги двигателей. Пусть в некоторый момент времени ракета в какой-либо инерциальной системе отсчета имеет скорость $\vec{v}$. Введем сопутствующую

инерциальную систему отсчета, в которой в данный момент времени ракета неподвижна. Если работающий двигатель ракеты за промежуток времени Δt выбрасывает газ массы Δm_f с постоянной скоростью $\vec{v}_{omn}$ относительно ракеты, то спустя время Δt скорость ракеты в сопутствующей системе координат будет отлична от нуля и равна $\Delta \vec{v}$.

Применим к рассматриваемой замкнутой системе "ракета плюс газ" закон сохранения импульса. В начальный момент времени в сопутствующей системе отсчета ракета и газ покоятся, поэтому полный импульс равен нулю. Согласно закону сохранения импульса он останется равным нулю и через время Δt . Поскольку через время Δt импульс ракеты равен $m \Delta \vec{v}$, а импульс выброшенных газов $\Delta m_f \vec{v}_{omn}$, то имеем равенство:

$$m \Delta \vec{v} + \Delta m_f \vec{v}_{omn} = 0. \quad (2.10)$$

Полная масса системы "ракета плюс газ" сохраняется, то есть масса выброшенного газа равна убыли массы ракеты:

$$\Delta m + \Delta m_f = 0. \quad (2.11)$$

Уравнение (2.10) с учетом (2.11) после деления на Δt и перехода к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ принимает вид

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{v}_{omn} \frac{dm}{dt}. \quad (2.12)$$

Отметим, что в (2.11) масса ракеты непостоянна и убывает из-за потери газа, то есть $\frac{dm}{dt} < 0$. Поскольку вектор $\vec{v}_{omn}$ противоположно направлен по отношению к вектору $\vec{v}$, то уравнение (2.12) в проекции на направление движения имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} + v_{omn} \frac{dm}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad m dv + v_{omn} dm = 0.$$

Разделяя переменные, получаем $dv = -v_{omn} \frac{dm}{m}$. После интегрирования имеем

$$v(m) = -v_{omn} \ln |m| + \ln C.$$

Если в начальный момент времени скорость ракеты равна нулю, а ее масса с полным запасом топлива равна M , то из равенства $v(M) = -v_{omn} \ln M + \ln C = 0$ получаем:

$$v(m) = -v_{omn} \ln m + v_{omn} \ln M \quad \text{или} \quad v(m) = v_{omn} \ln \frac{M}{m}.$$

Полученная формула называется формулой Циолковского.

Пример 2.9. (Анализ эволюции популяции).

Составим модель популяции, описывающую процесс изменения количества особей некоторого вида животных, то есть опишем процесс размножения-вымирания.

Пусть $x(t)$ - число особей в популяции в момент времени t , $A(x)$ и $B(x)$ - число особей, рождающихся и умирающих соответственно в единицу времени; x_0 - число особей в начальный момент времени t_0 . Отсюда следует, что скорость изменения количества особей в популяции $\frac{dx}{dt}$ равна $A(x) - B(x)$, то есть имеется дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = A(x) - B(x). \quad (2.13)$$

Из общей модели (2.13) выделим два частных случая. Вначале предположим, что функции $A(x), B(x)$ линейны, то есть $A(x) = ax$, $B(x) = bx$ где a, b - известные положительные коэффициенты рождаемости и смертности особей в единицу времени. Модель (2.13) в данном случае приводит к уравнению $\frac{dx}{dt} = (a - b)x$. Общее решение этого уравнения $x(t) = Ce^{(a-b)t}$. Используя начальное условие $x(t_0) = x_0$, находим постоянную $C = x_0 e^{(b-a)t_0}$, и поэтому решением поставленной задачи в данном случае будет функция $x(t) = x_0 e^{(a-b)(t-t_0)}$. Из последнего соотношения, в частности, следует, что при $t \rightarrow +\infty$ в случае $a > b$ (коэффициент рождаемости больше коэффициента смертности) $x(t) \rightarrow +\infty$, а в случае $a < b$ популяция вымирает, так как $x(t) \rightarrow 0$.

Теперь рассмотрим пример нелинейной модели на основе уравнения (2.13). Пусть $A(x) = ax$, $B(x) = bx^2$. Тогда модель (2.13) приводит также к уравнению с разделяющимися переменными: $\frac{dx}{dt} = ax - bx^2$. Разделяя переменные при $x \neq 0$ и $a - bx \neq 0$, получаем $\frac{dx}{x(a - bx)} = dt$. Выражение слева можно проинтегрировать, разложив дробь на элементарные:

$$\frac{1}{x(a - bx)} = \frac{\frac{1}{a}(a - bx) + \frac{b}{a}x}{x(a - bx)} = \frac{1/a}{x} + \frac{1/a}{a/b - x}.$$

В результате интегрирования получим $\frac{1}{a} \ln \left| \frac{x}{a/b - x} \right| = t + \frac{1}{a} \ln C$ или, после потенцирования: $\frac{x}{a/b - x} = \bar{C} e^{at}$. Учитывая начальное условие $x(t_0) = x_0$, находим постоянную $C = \frac{x_0}{a/b - x_0} e^{-at_0}$. Подставляя найденное значение C в выражение для общего интеграла, имеем окончательное решение для данного случая:

$$x(t) = \frac{x_0 a/b}{x_0 + (a/b - x_0) e^{-a(t-t_0)}}.$$

Исследование полученного закона показывает, что при $t \rightarrow +\infty$ популяция стремится к устойчивому состоянию: $x(t) \rightarrow a/b$. Отметим, что при этом возможны два случая: $a/b > x_0$ и $a/b < x_0$, соответствующие увеличению и уменьшению числа особей в популяции относительно начального количества x_0 .

Пример 2.10. (Анализ эффективности рекламы).

Предположим, что фирмой реализуется продукция, о которой в момент времени t из числа N потенциальных покупателей знает лишь x покупателей. Для ускорения сбыта даны рекламные объявления и последующая информация распространяется среди покупателей посредством общения. Можно считать, что скорость изменения числа знающих о продукции покупателей $\frac{dx}{dt}$ пропорциональна как числу x знающих о товаре, так и числу $(N - x)$ покупателей, которые о нем не знают. Математическая модель описанной ситуации представляется следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x),$$

где k - положительный коэффициент пропорциональности. Предполагается, что в момент передачи рекламы о товаре узнало $\frac{N}{\gamma}$ человек, то есть имеется начальное условие $x(0) = \frac{N}{\gamma}$, где $\gamma > 1$. Решение уравнения можно представить в виде (см. пример 2.9, вторая часть, при $a = kN$, $b = k$):

$$\frac{x}{N-x} = Ce^{Nkt} \text{ или } x(t) = \frac{CNe^{Nkt}}{1 + CNe^{Nkt}}.$$

Используя начальное условие $x(0) = \frac{N}{\gamma}$, находим постоянную $C = \frac{1}{\gamma - 1}$ и получаем решение поставленной задачи:

$$x(t) = \frac{Ne^{Nkt}}{\gamma - 1 + e^{Nkt}}, \text{ или } x(t) = \frac{N}{1 + (\gamma - 1)e^{-Nkt}}.$$

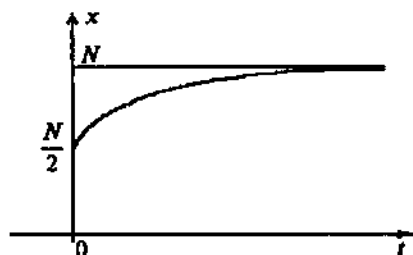


Рис.2.2

На рис.2.2 изображен график распространения информации при $\gamma = 2$, то есть $x(t) = \frac{N}{1 + e^{-Nkt}}$ при $x(0) = N/2$.

2.2. Однородные уравнения

2.2.1. Метод решения

Если в уравнении (2.2) функции $M(t, x)$ и $N(t, x)$ являются однородными функциями одной и той же степени (одного порядка), то уравнение (2.2) называется *однородным*.

Напомним, что функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией* степени (порядка) m , если при любом значении k выполняется условие:

$$f(kx, ky) = k^m f(x, y). \quad (2.14)$$

Например, функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 - xy + 3y^2}$ и $f(x, y) = \frac{x^3 + 2xy^2 - x^2y}{x^2 - y^2}$ являются однородными функциями первого порядка; функция $f(x, y) = ax + by$ есть однородный многочлен первого порядка; функции $f(x, y) = \sqrt{x^4 - x^3y}$ и $f(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 - y^4}{(x + y)^2}$ — однородные функции второго порядка; функция $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ — однородный многочлен второго порядка. Проверим выполнение условия (2.14), например, для функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 - xy + 3y^2}$. Поскольку

$$f(kx, ky) = \sqrt{k^2x^2 - k^2xy + 3k^2y^2} = k\sqrt{x^2 - xy + 3y^2},$$

то есть выполняется равенство $f(kx, ky) = k f(x, y)$, то рассматриваемая функция является однородной функцией первого порядка.

Особо выделим случай, когда равенство (2.14) выполняется при $m = 0$, то есть функция $f(x, y)$ является однородной функцией нулевого порядка. Примерами таких функций являются, в частности, отношения двух однородных функций одного и того же порядка. Особенностью однородных функций нулевого порядка является то обстоятельство, что такая функция всегда может быть представлена как функция одной переменной. Действительно, так как в (2.14) k любое, то при $k = 1/x$ и $m = 0$ имеем $f(x, y) = f(1, y/x) = \varphi(u)$, $u = y/x$. Аналогично, при $k = 1/y$ и $m = 0$ имеем $f(x, y) = f(x/y, 1) = \varphi(v)$, $v = x/y$. Например, функ-

ция $f(x, y) = \frac{3x^2 - xy + y^2}{(x - y)^2}$ является однородной функцией нулевого порядка. Раз-

делив числитель и знаменатель на x^2 , эту функцию можно переписать в виде

$$f(x, y) = \frac{3 - y/x + (y/x)^2}{(1 - y/x)^2} = \varphi(u),$$

где $\varphi(u) = \frac{3 - u + u^2}{(1 - u)^2}$, $u = y/x$.

Приведенное свойство однородных функций нулевого порядка используется при решении однородных дифференциальных уравнений. А именно, за-

мена переменных $z = \frac{y}{x}$ или $x = zt$, где $\chi(t)$ - новая функция, приводит исходное однородное дифференциальное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

Итак, для уравнения

$$M(t, x)dx + N(t, x)dt = 0, \quad (2.15)$$

где $M(t, x)$, $N(t, x)$ - однородные функции одного порядка, или уравнения

$$x' = f(t, x), \quad (2.16)$$

где $f(t, x)$ - однородная функция нулевого порядка, можно сформулировать следующий алгоритм решения.

Алгоритм решения однородного дифференциального уравнения

1. Ввести новую функцию $\chi(t)$ по формуле $z = \frac{y}{x}$ или $x = zt$ (тогда $dx = t dz + z dt$ или $x' = z't + z$) и подставить $x = zt$ и $dx = t dz + z dt$ в уравнение (2.15) (или $x' = z't + z$ в уравнение (2.16)).

2. В новых переменных t и z получить уравнение с разделяющимися переменными. Найти общее решение (или общий интеграл) полученного уравнения.

3. В полученном решении провести обратную замену переменных $z = \frac{y}{x}$, и выписать решение исходного однородного уравнения.

Пример 2.11. Решить уравнение:

$$(t + x)dt - (t - x)dx = 0.$$

Решение. Данное уравнение записано в форме (2.15), причем функции $M(t, x) = t + x$ и $N(t, x) = -(t - x) = x - t$ являются однородными многочленами первого порядка, то есть уравнение является однородным. Таким образом, для его решения следует использовать описанный алгоритм.

1. Полагаем $x = zt$, тогда $dx = t dz + z dt$. Производя замену переменных в исходном уравнении, получаем

$$t(1 + z)dt - t(1 - z)(t dz + z dt) = 0 \text{ или } t(1 + z^2)dt = t^2(1 - z)dz.$$

2. Разделяем переменные $\frac{dt}{t} = \frac{1 - z}{1 + z^2} dz$ (при $t \neq 0$) и интегрируем:

$$\ln |t| - \frac{1}{2} \ln C = \int \frac{1 - z}{1 + z^2} dz, \quad C > 0.$$

Интеграл справа можно записать так:

$$\int \frac{1 - z}{1 + z^2} dz = \int \frac{dz}{1 + z^2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(z^2 + 1)}{z^2 + 1} = \arctg z - \frac{1}{2} \ln(z^2 + 1).$$

Получаем решение (общий интеграл) $\ln \frac{t^2(1+z^2)}{C} = 2 \operatorname{arctg} z$ вспомогательного уравнения или, после потенцирования, $t^2(1+z^2) = Ce^{2 \operatorname{arctg} z}$.

3. Возвращаясь к исходной переменной x ($z = \frac{x}{t}$), получаем семейство интегральных кривых $x^2 + t^2 = Ce^{2 \operatorname{arctg} \frac{x}{t}}$, которое представляет собой общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

Заметим, что если на плоскости (t, x) ввести полярные координаты $t = \rho \cos \varphi$, $x = \rho \sin \varphi$, то полученный общий интеграл можно записать в виде $\rho^2 = Ce^{2\varphi}$ или $\rho = Ce^{\varphi}$, то есть интегральные кривые рассмотренного уравнения образуют семейство спиралей Архимеда. Можно ввести полярные координаты сразу в исходном дифференциальном уравнении, учитывая, что $dt = \cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi$, $dx = \sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi$. Тогда исходное уравнение примет вид $\rho^2 d\varphi = \rho d\rho$, или $\rho d\varphi = d\rho$. Интегрируя последнее уравнение, получаем тот же ответ, что и выше $\varphi = \ln \rho - \ln C$ или $\rho = Ce^{\varphi}$.

Пример 2.12. Решить уравнение:

$$tx' = x + t \cos \frac{x}{t}.$$

Решение. Переписывая уравнение в виде $x' = \frac{x}{t} + \cos \frac{x}{t}$, замечаем, что функция $f(t, x) = \frac{x}{t} + \cos \frac{x}{t}$ является однородной функцией нулевого порядка, следовательно, уравнение - однородное.

1. Полагаем $x = zt$, тогда $x' = z + tz'$. Производя замену переменных в исходном уравнении, получаем $tz' = \cos z$.

2. Разделяем переменные $\frac{dz}{\cos z} = \frac{dt}{t}$ и интегрируем:

$$\int \frac{d \sin z}{1 - \sin^2 z} = \ln |t| + \ln C, \quad C > 0.$$

Интеграл слева - табличный, поэтому

$$\ln |Ct| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin z}{1 - \sin z} \right| \quad \text{или} \quad \ln |Ct| = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin z}{\cos z} \right)^2.$$

После потенцирования имеем $\frac{1 + \sin z}{\cos z} = Ct$, или окончательно: $1 + \sin z = Ct \cos z$, где C - любое.

3. Возвращаясь к исходной переменной, получаем общий интеграл исходного уравнения $1 + \sin \frac{x}{t} - Ct \cos \frac{x}{t} = 0$.

Пример 2.13. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения

$$(t^4 + 6t^2x^2 + x^4)dt + 4tx(t^2 + x^2)dx = 0,$$

проходящую через точку $(1, 0)$.

Решение. Обе функции $M(t, x)$ и $N(t, x)$ являются однородными функциями четвертой степени, поэтому рассматриваемое уравнение однородное и для его решения следует использовать приведенный выше алгоритм.

1. Проводя замену переменных в исходном уравнении $x = tz$, $dx = t dz + z dt$, получаем $(5z^4 + 10z^2 + 1)dt + 4tz(1 + z^2)dz = 0$.

2. Разделяем переменные при $t \neq 0$ и интегрируем:

$$\ln|t| - \ln|C_1| = - \int \frac{4z(1 + z^2)}{5z^4 + 10z^2 + 1} dz.$$

Интеграл справа можно представить таким образом:

$$\int \frac{4z(1 + z^2)}{5z^4 + 10z^2 + 1} dz = \frac{1}{5} \int \frac{d(5z^4 + 10z^2 + 1)}{5z^4 + 10z^2 + 1}.$$

Учитывая это, записываем решение уравнения в виде

$$\ln|t^5(5z^4 + 10z^2 + 1)| = 5 \ln C_1, \quad C_1 > 0,$$

или, после потенцирования,

$$t^5(5z^4 + 10z^2 + 1) = C,$$

где обозначено $C = C_1^5$, $C \neq 0$. "Потерянное" при разделении переменных решение $t = 0$ входит в полученную совокупность при $C = 0$.

3. Возвращаясь к переменной x , получаем общий интеграл исходного уравнения $5tx^4 + 10t^3x^2 + t^5 = C$, где C - любое.

Для решения поставленной задачи Коши нужно найти значение постоянной C , при котором из полученного семейства выделяется интегральная кривая, проходящая через точку $(0, 1)$. Это значение C получаем из условия $x(1) = 0$, а именно, $C = 1$. Таким образом, решением поставленной задачи Коши является частный интеграл $5tx^4 + 10t^3x^2 + t^5 - 1 = 0$.

2.2.2. Уравнения, приводящиеся к однородным

Рассмотрим уравнение (2.9) в случае, когда условие $a_1b_2 = b_1a_2$ не выполняется, то есть уравнение

$$x' = f\left(\frac{a_1t + b_1x + d_1}{a_2t + b_2x + d_2}\right), \quad a_1b_2 \neq b_1a_2. \quad (2.17)$$

Введем новые переменные u и v (например, $v = v(u)$) так, чтобы правая часть уравнения (2.17) в этих переменных была однородной функцией нулевого порядка. А именно, сделаем замену $t = u + \alpha$, $x = v + \beta$ и подберем постоянные α и β так, чтобы в выражении справа в (2.17) после подстановки пропали свободные члены. Подставляем $t = u + \alpha$ и $x = v + \beta$ в дробь и приравняем нулю свободные члены числителя и знаменателя, то есть записываем два равенства:

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + d_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + d_2 = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Определитель этой системы линейных алгебраических уравнений: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$, не равен нулю по условию, поэтому система имеет единственное решение, то есть существует единственная пара чисел α и β , такая что при подстановке $t = u + \alpha$ и $x = v + \beta$ правая часть уравнения (2.17) принимает вид $f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$, а само уравнение: $\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$. Это уравнение является однородным.

З а м е ч а н и е 2.2. Материал данного раздела полностью завершает исследование уравнения (2.9). Действительно, в случае $a_1b_2 = b_1a_2$ уравнение (2.9) приводится к уравнению с разделяющимися переменными (см. разд. 2.1.2), а в случае $a_1b_2 \neq b_1a_2$ - к однородному уравнению (что и показано в данном пункте). Таким образом, можно сформулировать окончательный алгоритм решения рассматриваемого уравнения.

Алгоритм решения уравнения (2.9)

1. Выписать коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2 и вычислить выражение $a_1b_2 - a_2b_1$. Если это выражение равно нулю, то уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными (см. разд. 2.1.2).
2. Если $a_1b_2 \neq a_2b_1$, то применить замену переменных $t = u + \alpha, x = v + \beta$. В правой части уравнения в новых переменных получим дробь, свободные члены числителя и знаменателя которой следует приравнять нулю. Из полученной таким образом системы уравнений найти значения постоянных α и β . Отметим, что для вычисления α и β можно сразу выписывать систему (2.18).
3. Выписать однородное уравнение в новых переменных u, v и решить его.
4. В полученном решении однородного уравнения в переменных u, v провести обратную замену $u = t - \alpha, v = x - \beta$ и выписать общее решение исходного уравнения.

Пример 2.14. Решить уравнение:

$$(2t - x + 1)dt + (2x - t + 1)dx = 0.$$

Решение. 1. Для данного уравнения имеем: $a_1 = 2, a_2 = -1, b_1 = -1, b_2 = 2$, так что $a_1b_2 - a_2b_1 = 3$.

2. Поскольку $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то проводим замену $t = u + \alpha, x = v + \beta$. Записываем уравнение в виде (2.17) и, подставляя в него новые переменные, получаем:

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u - v + 2\alpha - \beta + 1}{u - 2v + \alpha - 2\beta - 1}.$$

Приравниваем нулю свободные члены: $\begin{cases} 2\alpha - \beta + 1 = 0, \\ \alpha - 2\beta - 1 = 0 \end{cases}$ и находим $\alpha = \beta = -1$, а следовательно, $t = u - 1$, $x = v - 1$.

3. Подставляя найденные α и β в уравнение, выписанное в п.2, получаем $\frac{dv}{du} = \frac{2u - v}{u - 2v}$ или $(2u - v)du + (-u + 2v)dv$. Это однородное уравнение в переменных u, v . Пусть, например, $v = \varphi(u)$. Для решения этого уравнения, следуя разд. 2.2.1, рассмотрим новую переменную $z(u)$, $z = \frac{v}{u}$ или $v = zu$, $dv = zdu + u dz$. После подстановки и преобразования, уравнение принимает вид $2(z^2 - z + 1)du + (2z - 1)udz = 0$. Разделяя переменные при $u \neq 0$ и интегрируя, получаем $2 \ln |u| - \ln C = - \int \frac{d(z^2 - z + 1)}{z^2 - z + 1}$, то есть

$$2 \ln |u| + \ln(z^2 - z + 1) = \ln C, \quad C > 0.$$

Потенцируя и возвращаясь к переменной v , находим общий интеграл $v^2 - uv + u^2 = C$ уравнения $\frac{dv}{du} = \frac{2u - v}{u - 2v}$.

4. Возвращаясь к исходным переменным t, x ($u = t + 1$, $v = x + 1$), определяем общий интеграл $(x + 1)^2 - (x + 1)(t + 1) + (t + 1)^2 = C$ исходного уравнения.

Некоторые уравнения первого порядка можно привести к однородным заменой $x = y^m$, где $y = y(t)$ - новая функция, а число m подбирается так, чтобы после подстановки $x = y^m$, $x' = my^{m-1}y'$ получилось однородное уравнение в переменных t и y .

Пример 2.15. Решить уравнение

$$x' t^3 + 8 t^4 x^2 = 1.$$

Решение. Введем обозначение $x = y^m$. Подставляя $x = y^m$, $x' = my^{m-1}y'$ в заданное уравнение, записываем

$$my^{m-1}y' t^3 + 8 t^4 y^{2m} = 1 \text{ или } mt^3 y^{m-1} dy + (8 t^4 y^{2m} - 1) dt = 0.$$

Полученное уравнение записано в виде (2.15). Оно будет однородным, если найдется такое число m , что функции $M(t, y) = m t^3 y^{m-1}$ и $N(t, y) = 8 t^4 y^{2m} - 1$ при этом значении m - однородные функции одного порядка. Поскольку функция $N(t, y)$ имеет нулевой порядок, то условием однородности уравнения будет выполнение равенств $3 + m - 1 = 0$ и $4 + 2m = 0$. Так как эти равенства выполняются одновременно при $m = -2$, то уравнение $mt^3 y^{m-1} dy + (8 t^4 y^{2m} - 1) dt = 0$ является однородным при $m = -2$, а исходное уравнение приводится к нему заменой $x = \frac{1}{y^2}$. Применяя эту подстановку, перепишем уравнение в виде

$$-\frac{2}{y^3}t^3y' + 8t^4\frac{1}{y^4} = 1 \text{ или } 2y' - 8\frac{t}{y} + \frac{y^3}{t^3} = 0.$$

Полученное однородное уравнение далее согласно алгоритму приводим к уравнению с разделяющимися переменными заменой $y = tu$, где $u = u(t)$ - новая функция. Выполнив замену, получаем $2(u + tu') = \frac{8}{u} - u^3$ или $tu' = \frac{8 - u^4 - 2u^2}{2u}$. Разделяем переменные: $\frac{2u du}{u^4 + 2u^2 - 8} = -\frac{dt}{t}$. Для интегрирования выражения, стоящего слева, обозначим $u^2 = z$ и получим табличный интеграл $\int \frac{dz}{(z+1)^2 - 9} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{z+1-3}{z+1+3} \right|$. Решение вспомогательного уравнения запишется следующим образом: $\frac{1}{6} \left| \frac{u^2 - 2}{u^2 + 4} \right| = -\ln|t| + \ln|C_1|$ или $\frac{u^2 - 2}{u^2 + 4} = \frac{C}{t^6}$, $C = C_1^6$. Возвращаясь к переменной x , подставляем $u^2 = \frac{y^2}{t^2}$, $y^2 = \frac{1}{x}$, то есть $u^2 = \frac{1}{xt^2}$. Находим решение исходного уравнения в форме общего интеграла $(1 - 2xt^2)^6 - C(1 + 4xt^2) = 0$.

2.3. Уравнения в полных дифференциалах

2.3.1. Метод решения

Рассмотрим уравнение (2.2) при некоторых дополнительных условиях.

Уравнение $M(t,x)dx + N(t,x)dt = 0$ называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть $M(t,x)dx + N(t,x)dt$ является полным дифференциалом некоторой функции, то есть существует такая функция $u = u(t,x)$, что выполняется равенство

$$du = M(t,x)dx + N(t,x)dt. \quad (2.19)$$

Учитывая формулу

$$du = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} dt$$

записи первого дифференциала дифференцируемой функции $u(t,x)$, получаем

$$M(t,x) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}, \quad N(t,x) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}. \quad (2.20)$$

Если предположить дополнительно, что функция $u(t, x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а поэтому имеет место равенство смешанных производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$, то получаем

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial N(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x},$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial N(t, x)}{\partial x}. \quad (2.21)$$

Равенство (2.21) является условием полного дифференциала, то есть условием, при выполнении которого уравнение (2.2) может быть записано в виде $du = 0$. Решение этого уравнения, очевидно, записывается в виде $u(t, x) = C$. Таким образом, решение уравнения в полных дифференциалах, то есть уравнения (2.2) при выполнении условия (2.21), сводится к известной задаче нахождения функции $u(t, x)$ по ее полному дифференциалу. Один из методов решения этой задачи заключается в следующем.

Проинтегрируем первое из равенств (2.20) по переменной x , а второе - по переменной t (заметим, что переменная, по которой не ведется интегрирование, рассматривается как параметр):

$$u(t, x) = \int \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} dx + \varphi(t) = \int M(t, x) dx + \varphi(t),$$

$$u(t, x) = \int \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} dt + \psi(x) = \int N(t, x) dt + \psi(x),$$

где $\varphi(t)$, $\psi(x)$ - произвольные функции своих аргументов. Приравнявая имеющиеся выражения, получаем уравнение для определения этих функций:

$$\int M(t, x) dx + \varphi(t) = \int N(t, x) dt + \psi(x). \quad (2.22)$$

Алгоритм решения уравнения в полных дифференциалах

1. Выписать функции $M(t, x)$ и $N(t, x)$ и проверить выполнение условия (2.21).
2. Найти интегралы $\int M(t, x) dx$ и $\int N(t, x) dt$, рассматривая при этом переменную, по которой не ведется интегрирование, как параметр.
3. Записать уравнение (2.22) и найти функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$.
4. Записать общий интеграл уравнения в полных дифференциалах в виде

$$\int M(t, x) dx + \varphi(t) - C = 0 \text{ или } \int N(t, x) dt + \psi(x) - C = 0.$$

Пример 2.16. Решить уравнение:

$$(t^2 - x^2) dx + 2tx dt = 0.$$

Решение. 1. $M(t, x) = t^2 - x^2$, $N(t, x) = 2tx$.

Проверяем условие (2.21):

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial t} = 2t, \quad \frac{\partial N(t, x)}{\partial x} = 2t.$$

Следовательно, рассматриваемое уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

2. Найдем интегралы:

$$\int M(t, x) dx = \int (t^2 - x^2) dx = t^2 x - \frac{x^3}{3} + \varphi(t), \quad \int N(t, x) dt = \int 2tx dt = t^2 x + \psi(x).$$

3. Записывая уравнение (2.22)

$$t^2 x - \frac{x^3}{3} + \varphi(t) = t^2 x + \psi(x),$$

находим $\varphi(t) = 0$, $\psi(x) = -\frac{x^3}{3}$.

4. Общий интеграл заданного уравнения: $t^2 x - \frac{x^3}{3} - C = 0$.

Пример 2.17. Решить уравнение:

$$e^{-x} dt - (2x + te^{-x}) dx = 0.$$

Решение. 1. $M(t, x) = -2x - te^{-x}$, $N(t, x) = e^{-x}$. Проверяем условие (2.21):

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial t} = -e^{-x}, \quad \frac{\partial N(t, x)}{\partial x} = -e^{-x}.$$

Следовательно, рассматриваемое уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

2. Найдем интегралы:

$$\int M(t, x) dx = \int (-2x - te^{-x}) dx = -x^2 + te^{-x} + \varphi(t), \quad \int N(t, x) dt = \int e^{-x} dt = te^{-x} + \psi(x).$$

3. Записывая уравнение (2.22)

$$-x^2 + te^{-x} + \varphi(t) = te^{-x} + \psi(x),$$

находим $\varphi(t) = 0$, $\psi(x) = -x^2$.

4. Общий интеграл заданного уравнения: $te^{-x} - x^2 - C = 0$.

Пример 2.18. Решить уравнение:

$$(1 + x^2 \sin 2t) dt - 2x \cos^2 t dx = 0.$$

Решение. 1. $M(t, x) = -2x \cos^2 t$, $N(t, x) = 1 + x^2 \sin 2t$. Проверяем условие (2.21):

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial t} = 4x \cos t \sin t = 2x \sin 2t, \quad \frac{\partial N(t, x)}{\partial x} = 2x \sin 2t.$$

Следовательно, рассматриваемое уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

2. Найдем интегралы:

$$\int M(t, x) dx = \int (-2x \cos^2 t) dx = -x^2 \cos^2 t + \varphi(t),$$

$$\int N(t, x) dt = \int (1 + x^2 \sin 2t) dt = t - \frac{1}{2} x^2 \cos 2t + \psi(x),$$

3. Записывая уравнение (2.22)

$$-x^2 \cos^2 t + \varphi(t) = t - \frac{1}{2} x^2 \cos 2t + \psi(x),$$

и выполнив преобразования правой части:

$$-x^2 \cos^2 t + \varphi(t) = t - \frac{1}{2} x^2 (2 \cos^2 t - 1) + \psi(x),$$

$$-x^2 \cos^2 t + \varphi(t) = t - x^2 \cos^2 t + \frac{x^2}{2} + \psi(x),$$

находим $\varphi(t) = t$, $\psi(x) = -\frac{x^2}{2}$.

4. Общий интеграл заданного уравнения: $t - x^2 \cos^2 t - C = 0$.

2.3.2. Уравнения, приводящиеся к уравнениям в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Предположим, что уравнение (2.2) не является уравнением в полных дифференциалах, то есть не выполняется условие (2.21). Домножим обе части уравнения (2.2) на некоторую функцию $\mu = \mu(t, x)$:

$$\mu(t, x) M(t, x) dx + \mu(t, x) N(t, x) dt = 0. \quad (2.23)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (2.23) также можно записать в виде (2.2), переобозначив $\mu(t, x) M(t, x) = \bar{M}(t, x)$, $\mu(t, x) N(t, x) = \bar{N}(t, x)$:

$$\bar{M}(t, x) dx + \bar{N}(t, x) dt = 0.$$

Если теперь проверить условие (2.21) для полученного уравнения, то оно может оказаться выполненным и, таким образом, решение исходного уравнения сведется к решению уравнения в полных дифференциалах. Функция $\mu(t, x)$, в результате умножения на которую уравнение (2.2) преобразуется к уравнению в полных дифференциалах, называется *интегрирующим множителем*.

З а м е ч а н и е 2.3.

1. Класс уравнений, приводящихся к уравнению в полных дифференциалах (имеющих интегрирующий множитель), достаточно велик. Действительно, предположим, что уравнение (2.2) имеет общий интеграл, который можно представить в виде $u(t, x) - C = 0$. Поскольку полный дифференциал функции $u(t, x)$ равен нулю:

$$du(t, x) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial t} dt = 0,$$

то $\frac{dx}{dt} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial x}}$. С другой стороны, уравнение (2.2) представляется в виде

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{N(t, x)}{M(t, x)}, \text{ откуда получаем}$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{N(t, x)}{M(t, x)} = \mu(t, x).$$

Последнее равенство означает, что уравнение (2.2), имеющее общий интеграл $u(t, x) - C = 0$, имеет интегрирующий множитель $\mu(t, x) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial t}}$.

2. Общего подхода, позволяющего найти интегрирующий множитель для произвольного уравнения (2.2) (в предположении, что он существует) нет. Задача отыскания интегрирующего множителя для конкретных уравнений носит скорее творческий характер, и возможность ее решения зависит от умения и навыков исследователя.

3. При решении уравнения методом интегрирующего множителя необходимо помнить, что домножение исходного уравнения (2.2) на функцию $\mu(t, x)$ может привести к появлению "лишних" решений. А именно, в полученном решении могут оказаться "лишними" интегралы вида $\mu(t, x) = 0$. Поэтому после решения уравнения (2.23) надо проверить, что входящие в его общий интеграл решения $\mu(t, x) = 0$ также являются решениями исходного уравнения (2.2), и в противном случае исключить их из ответа. Аналогично, необходимо проверить возможность наличия "потерянных" решений, которые могут определяться такими точками (t, x) , в которых функция $\mu(t, x)$ не определена.

Нетрудно заметить, что изученные в предыдущих разделах уравнения с разделяющимися переменными и однородные уравнения имеют интегрирующий множитель.

Для уравнения (2.3) с разделяющимися переменными таким множителем служит $\mu(t, x) = \frac{1}{f_2(x) \Phi_1(t)}$. Действительно, для уравнения (2.4) с разделенными переменными имеем

$$M(t, x) = \frac{\Phi_2(x)}{f_2(x)} \text{ и } \frac{\partial M}{\partial t} = 0, \quad N(t, x) = \frac{f_1(t)}{\Phi_1(t)} \text{ и } \frac{\partial N}{\partial x} = 0,$$

то есть выполнено условие (2.21).

Для однородного уравнения (2.15) интегрирующий множитель имеет вид

$$\mu(t, x) = \frac{1}{x M(t, x) + t N(t, x)},$$

причем $x M(t, x) + t N(t, x) \neq 0$, так как в противном случае $\frac{N(t, x)}{M(t, x)} = -\frac{x}{t}$ и уравнение (2.2) имело бы вид $\frac{dx}{x} - \frac{dt}{t} = 0$ и уже являлось бы уравнением в полных дифференциалах.

Как уже упоминалось, общего подхода для отыскания интегрирующего множителя не существует. Однако эту задачу все же можно изложить более формально и, тем самым, облегчить ее решение. Запишем для этого условие (2.21) для уравнения (2.23):

$$\frac{\partial [\mu(t, x) M(t, x)]}{\partial t} = \frac{\partial [\mu(t, x) N(t, x)]}{\partial x}.$$

Выполнив дифференцирование, получим:

$$\frac{\partial \mu(t, x)}{\partial t} M(t, x) + \frac{\partial M(t, x)}{\partial t} \mu(t, x) = \frac{\partial \mu(t, x)}{\partial x} N(t, x) + \frac{\partial N(t, x)}{\partial x} \mu(t, x),$$

или, разделив обе части на $\mu(t, x)$ и перегруппировав слагаемые:

$$\frac{1}{\mu(t, x)} \frac{\partial \mu(t, x)}{\partial t} M(t, x) - \frac{1}{\mu(t, x)} \frac{\partial \mu(t, x)}{\partial x} N(t, x) = \frac{\partial N(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial M(t, x)}{\partial t}.$$

Учитывая равенства $\frac{1}{\mu(t, x)} \frac{\partial \mu(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial \ln \mu(t, x)}{\partial t}$ и $\frac{1}{\mu(t, x)} \frac{\partial \mu(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial \ln \mu(t, x)}{\partial x}$, получаем дифференциальное уравнение в частных производных относительно искомой функции $\mu(t, x)$:

$$M(t, x) \frac{\partial \ln \mu(t, x)}{\partial t} - N(t, x) \frac{\partial \ln \mu(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial M(t, x)}{\partial t}. \quad (2.24)$$

Уравнение (2.24), будучи дифференциальным уравнением в частных производных, может иметь бесконечно много решений, поэтому одно и то же обыкновенное дифференциальное уравнение может иметь бесконечно много интегрирующих множителей. В частности, если функция $\mu(t, x)$ - интегрирующий множитель, то и функция $C \mu(t, x)$ для любой постоянной C также является интегрирующим множителем.

Вообще говоря, искать решение уравнения (2.24) не легче, чем подбирать интегрирующий множитель для уравнения (2.2) непосредственно. Однако в некоторых частных случаях уравнение (2.24) легко решается. Например, пусть интегрирующий множитель является функцией одной переменной x , то есть $\mu = \mu(x)$. В этом случае уравнение (2.24) преобразуется к виду

$$N(t, x) \frac{d \ln \mu(x)}{dx} = \frac{\partial M(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial N(t, x)}{\partial x}.$$

Отсюда следует, что предположение $\mu = \mu(x)$ может быть выполнено только, если функция

$$\frac{\frac{\partial M(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial N(t,x)}{\partial x}}{N(t,x)}$$

зависит от одной переменной x . Тогда

$$\mu(x) = \exp \left(\int \frac{\frac{\partial M(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial N(t,x)}{\partial x}}{N(t,x)} dx \right). \quad (2.25)$$

Аналогично, в предположении, что интегрирующий множитель является функцией одной переменной t , то есть $\mu = \mu(t)$, уравнение (2.24) преобразуется к виду:

$$M(t,x) \frac{d \ln \mu(t)}{dt} = \frac{\partial N(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial M(t,x)}{\partial t}.$$

Отсюда следует, что предположение $\mu = \mu(t)$ может быть выполнено только, если функция

$$\frac{\frac{\partial N(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial M(t,x)}{\partial t}}{M(t,x)}$$

зависит от одной переменной t . Тогда

$$\mu(t) = \exp \left(\int \frac{\frac{\partial N(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial M(t,x)}{\partial t}}{M(t,x)} dt \right). \quad (2.26)$$

Рассмотрим теперь уравнение (2.2), предполагая, что отыскать интегрирующий множитель указанными способами не удалось, но это уравнение можно представить в виде

$$(M_1(t,x) + M_2(t,x)) dx + (N_1(t,x) + N_2(t,x)) dt = 0, \quad (2.27)$$

причем уравнения $M_1(t,x) dx + N_1(t,x) dt = 0$ и $M_2(t,x) dx + N_2(t,x) dt = 0$ имеют общие интегралы $u_1(t,x) - C = 0$ и $u_2(t,x) - C = 0$ и интегрирующие множители $\mu_1(t,x)$ и $\mu_2(t,x)$ соответственно. Если удастся подобрать функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ такие, что

$$\mu_1(t,x) \varphi_1(u_1(t,x)) = \mu_2(t,x) \varphi_2(u_2(t,x)) = \mu(t,x), \quad (2.28)$$

то $\mu(t,x)$ является интегрирующим множителем уравнения (2.27), в чем можно убедиться, подставив выражение (2.28) в уравнение (2.24).

Способы подбора интегрирующего множителя для уравнения (2.2)

1. Если уравнение (2.2) является уравнением с разделяющимися переменными, то $\mu(t, x) = \frac{1}{f_2(x) \varphi_1(t)}$.

2. Если уравнение (2.2) является однородным, то $\mu(t, x) = \frac{1}{xM(t, x) + tN(t, x)}$.

3. Если функции $M(t, x)$ и $N(t, x)$ в уравнении (2.2) таковы, что функция $\frac{\frac{\partial M(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial N(t, x)}{\partial x}}{N(t, x)}$ зависит только от переменной x , то

$$\mu(x) = \exp \left(\int \frac{\frac{\partial M(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial N(t, x)}{\partial x}}{N(t, x)} dx \right).$$

4. Если функции $M(t, x)$ и $N(t, x)$ в уравнении (2.2) таковы, что функция $\frac{\frac{\partial N(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial M(t, x)}{\partial t}}{M(t, x)}$ зависит только от переменной t , то

$$\mu(t) = \exp \left(\int \frac{\frac{\partial N(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial M(t, x)}{\partial t}}{M(t, x)} dt \right).$$

5. Если уравнение (2.2) можно представить в виде

$$(M_1(t, x) + M_2(t, x)) dx + (N_1(t, x) + N_2(t, x)) dt = 0,$$

так что уравнения $M_1(t, x) dx + N_1(t, x) dt = 0$ и $M_2(t, x) dx + N_2(t, x) dt = 0$ имеют общие интегралы $u_1(t, x) - C = 0$ и $u_2(t, x) - C = 0$ и интегрирующие множители $\mu_1(t, x)$ и $\mu_2(t, x)$ соответственно, то надо подобрать функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ такие, что

$$\mu_1(t, x) \varphi_1(u_1(t, x)) = \mu_2(t, x) \varphi_2(u_2(t, x)).$$

Интегрирующий множитель для уравнения (2.2) в этом случае имеет вид

$$\mu(t, x) = \mu_1(t, x) \varphi_1(u_1(t, x)) = \mu_2(t, x) \varphi_2(u_2(t, x)).$$

6. Если не выполняются условия ни одного из пп.1-5, то интегрирующий множитель ищется как решение уравнения (2.24). При этом решение может оказаться функцией одной переменной $\mu(t, x) = \mu(z)$, например, для $z = tx$ или $z = x/t$.

Пример 2.19. Решить уравнение:

$$t(1 - x^2) dt - x(1 - t^2) dx = 0.$$

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными типа (2.3), где $f_1(t) = t$, $f_2(x) = 1 - x^2$, $\varphi_1(t) = -(1 - t^2)$, $\varphi_2(x) = x$, поэтому для отыскания интегрирующего множителя применяется первый способ:

$$\mu(t, x) = \frac{1}{f_2(x) \varphi_1(t)} = -\frac{1}{(1 - x^2)(1 - t^2)}.$$

Умножая уравнение на $\mu(t, x)$, получаем

$$-\frac{t}{1 - t^2} dt + \frac{x}{1 - x^2} dx = 0.$$

Полученное уравнение решаем, следуя алгоритму решения уравнения в полных дифференциалах.

1. $M(t, x) = \frac{x}{1 - x^2}$, $N(t, x) = -\frac{t}{1 - t^2}$. Проверяем условие (2.21):

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial N(t, x)}{\partial x} = 0.$$

Следовательно, рассматриваемое уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

2. Найдем интегралы:

$$\int M(t, x) dx = \int \frac{x}{1 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln|1 - x^2| + \varphi(t),$$

$$\int N(t, x) dt = \int -\frac{t}{1 - t^2} dt = \frac{1}{2} \ln|1 - t^2| + \psi(x).$$

3. Записывая уравнение (2.22)

$$-\frac{1}{2} \ln|1 - x^2| + \varphi(t) = \frac{1}{2} \ln|1 - t^2| + \psi(x),$$

находим $\varphi(t) = \frac{1}{2} \ln|1 - t^2|$, $\psi(x) = -\frac{1}{2} \ln|1 - x^2|$.

4. Общий интеграл заданного уравнения:

$$-\frac{1}{2} \ln|1 - x^2| + \frac{1}{2} \ln|1 - t^2| - C_2 = 0 \text{ или } \ln|1 - x^2| - \ln|1 - t^2| = \ln C_1,$$

где $C_1 > 0$, $\ln C_1 = -2C_2$.

Проводя далее те же преобразования, что и в примере 2.2, записываем общий интеграл заданного уравнения в виде $x^2 + C(1 - t^2) - 1 = 0$.

Проверяя п.3 замечания 2.2 для данного уравнения, замечаем, что $\mu(t, x) \neq 0$ (так что "лишних" решений нет). "Потерянных" решений в данном случае тоже нет, так как $\mu(t, x)$ не определена при $1 - x^2 = 0$ и $1 - t^2 = 0$, а соответствующие решения $t = \pm 1$ и $x = \pm 1$ входят в полученную совокупность (см. пример 2.2).

Пример 2.20. Решить уравнение:

$$(t+x) dt - (t-x) dx = 0.$$

Решение. Данное уравнение является однородным уравнением типа (2.15), где $M(t,x) = -(t-x)$, $N(t,x) = t+x$, поэтому для отыскания интегрирующего множителя применяется второй способ:

$$\mu(t,x) = \frac{1}{t(t+x) - x(t-x)} = \frac{1}{t^2 + x^2}.$$

Умножая уравнение на $\mu(t,x)$, получаем

$$\frac{t+x}{t^2+x^2} dt - \frac{t-x}{t^2+x^2} dx = 0.$$

Полученное уравнение решаем, следуя алгоритму решения уравнения в полных дифференциалах.

1. $M(t,x) = \frac{x-t}{t^2+x^2}$, $N(t,x) = \frac{t+x}{t^2+x^2}$. Проверяем условие (2.21):

$$\begin{aligned} \frac{\partial M(t,x)}{\partial t} &= \frac{-(t^2+x^2) - 2t(x-t)}{(t^2+x^2)^2} = \frac{t^2-x^2-2tx}{(t^2+x^2)^2}, \\ \frac{\partial N(t,x)}{\partial x} &= \frac{(t^2+x^2) - 2x(t+x)}{(t^2+x^2)^2} = \frac{t^2-x^2-2tx}{(t^2+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, рассматриваемое уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

2. Найдем интегралы:

$$\begin{aligned} \int M(t,x) dx &= \int \frac{x-t}{t^2+x^2} dx = \int \frac{x}{t^2+x^2} dx - \int \frac{t}{t^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+t^2) - \operatorname{arctg}(x/t) + \varphi(t), \\ \int N(t,x) dt &= \int \frac{x+t}{x^2+t^2} dt = \int \frac{x}{x^2+t^2} dt + \int \frac{t}{x^2+t^2} dt = - \int \frac{t^2 d(x/t)}{x^2+t^2} + \frac{1}{2} \ln(x^2+t^2) = \\ &= - \int \frac{d(x/t)}{1+(x/t)^2} + \frac{1}{2} \ln(x^2+t^2) = \frac{1}{2} \ln(x^2+t^2) - \operatorname{arctg}(x/t) + \psi(x). \end{aligned}$$

3. Записывая уравнение (2.22)

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+t^2) - \operatorname{arctg}(x/t) + \varphi(t) = \frac{1}{2} \ln(x^2+t^2) - \operatorname{arctg}(x/t) + \psi(x),$$

находим $\varphi(t) = 0$, $\psi(x) = 0$.

4. Общий интеграл заданного уравнения: $\frac{1}{2} \ln(x^2+t^2) - \operatorname{arctg}(x/t) - C = 0$ (сравните полученный ответ с примером 2.11).

Заметим, что умножение на $\mu(t, x)$ не приводит ни к появлению "лишних" решений ($\mu(t, x) \neq 0$), ни к "потерянным" решениям ($\mu(t, x)$ определена для всех (t, x)).

Пример 2.21. Решить уравнение:

$$(2x - 2 + 3t) dx + dt = 0.$$

Решение. Для данного уравнения $M(t, x) = 2x - 2 + 3t$, $N(t, x) = 1$, а функция $\frac{\partial M(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial N(t, x)}{\partial x} = \frac{3 - 0}{1} = 3$ и не зависит от переменных x и t , поэтому для отыскания интегрирующего множителя $\mu = \mu(x)$ воспользуемся третьим способом:

$$\mu = \mu(x) = \exp \left(\int \frac{\frac{\partial M(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial N(t, x)}{\partial x}}{N(t, x)} dx \right) = e^{\int 3 dx} = e^{3x}.$$

Умножая уравнение на $\mu(x)$, получаем

$$e^{3x} (2x - 2 + 3t) dx + e^{3x} dt = 0.$$

Полученное уравнение решаем, следуя алгоритму решения уравнения в полных дифференциалах.

1. $M(t, x) = e^{3x} (2x - 2 + 3t)$, $N(t, x) = e^{3x}$. Проверяем условие (2.21):

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial t} = 3e^{3x}, \quad \frac{\partial N(t, x)}{\partial x} = 3e^{3x}.$$

Следовательно, рассматриваемое уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

2. Найдем интегралы:

$$\begin{aligned} \int M(t, x) dx &= \int e^{3x} (2x - 2 + 3t) dx = \frac{1}{3} e^{3x} (2x - 2 + 3t) - \frac{2}{3} \int e^{3x} dx = \\ &= \frac{1}{3} e^{3x} (2x - 2 + 3t) - \frac{2}{9} e^{3x} = t e^{3x} + \frac{2}{3} x e^{3x} - \frac{8}{9} e^{3x} + \varphi(t), \\ \int N(t, x) dt &= \int e^{3x} dx = t e^{3x} + \psi(x). \end{aligned}$$

3. Записывая уравнение (2.22)

$$t e^{3x} + \frac{2}{3} x e^{3x} - \frac{8}{9} e^{3x} + \varphi(t) = t e^{3x} + \psi(x),$$

находим $\varphi(t) = 0$, $\psi(x) = \frac{2}{3} x e^{3x} - \frac{8}{9} e^{3x}$.

4. Общий интеграл заданного уравнения: $\left(t + \frac{2}{3}x - \frac{8}{9}\right)e^{3x} - C = 0$.

Заметим, что умножение на $\mu(x)$ не приводит ни к появлению "лишних" решений ($\mu(x) \neq 0$), ни к "потерянным" решениям ($\mu(x)$ определена для всех x).

Пример 2.22. Решить уравнение:

$$x dx + (t^2 + x^2 + t) dt = 0.$$

Решение. Для данного уравнения $M(t, x) = x$, $N(t, x) = t^2 + x^2 + t$, а функция $\frac{\partial N(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial M(t, x)}{\partial t} = \frac{2x - 0}{M(t, x)} = \frac{2x - 0}{x} = 2$ и не зависит от переменных t и x , поэтому для отыскания интегрирующего множителя $\mu = \mu(t)$ воспользуемся четвертым способом.

$$\mu = \mu(t) = \exp \left(\int \frac{\frac{\partial N(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial M(t, x)}{\partial t}}{M(t, x)} dt \right) = e^{\int 2 dt} = e^{2t}.$$

Умножая уравнение на $\mu(t)$, получаем

$$xe^{2t} dx + (t^2 + x^2 + t) e^{2t} dt = 0.$$

Полученное уравнение решаем, следуя алгоритму решения уравнения в полных дифференциалах.

1. $M(t, x) = xe^{2t}$, $N(t, x) = (t^2 + x^2 + t) e^{2t}$. Проверяем условие (2.21):

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial t} = 2xe^{2t}, \quad \frac{\partial N(t, x)}{\partial x} = 2xe^{2t}.$$

Следовательно, рассматриваемое уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

2. Найдем интегралы:

$$\begin{aligned} \int M(t, x) dx &= \int xe^{2t} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2t} + \varphi(t), \\ \int N(t, x) dt &= \int (t^2 + x^2 + t) e^{2t} dt = \frac{1}{2} (t^2 + x^2 + t) e^{2t} - \frac{1}{2} \int (2t + 1) e^{2t} dt = \\ &= \frac{1}{2} (t^2 + x^2 + t) e^{2t} - \frac{1}{4} (2t + 1) e^{2t} + \frac{1}{2} \int e^{2t} dt = \\ &= \frac{1}{2} (t^2 + x^2 + t) e^{2t} - \frac{1}{4} (2t + 1) e^{2t} + \frac{1}{4} e^{2t} = \frac{1}{2} x^2 e^{2t} + \frac{1}{2} t^2 e^{2t} + \psi(x). \end{aligned}$$

3. Записывая уравнение (2.22)

$$\frac{1}{2} x^2 e^{2t} + \varphi(t) = \frac{1}{2} x^2 e^{2t} + \frac{1}{2} t^2 e^{2t} + \psi(x),$$

находим $\varphi(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{2t}$, $\psi(x) = 0$.

4. Общий интеграл заданного уравнения:

$$\frac{1}{2} x^2 e^{2t} + \frac{1}{2} t^2 e^{2t} - C_1 = 0 \text{ или } (x^2 + t^2) e^{2t} - C = 0, \text{ где } C = 2C_1.$$

Заметим, что умножение на $\mu(t)$ не приводит ни к появлению "лишних" решений ($\mu(t) \neq 0$), ни к "потерянным" решениям ($\mu(t)$ определена для всех t).

Пример 2.23. Решить уравнение:

$$(t^2 - tx^3) dx + (x^4 + tx) dt = 0.$$

Решение. Перегруппировав слагаемые, приведем уравнение к виду (2.27), где $M_1(t, x) = t^2$, $M_2(t, x) = -tx^3$, $N_1(t, x) = tx$, $N_2(t, x) = x^4$:

$$(t^2 dx + tx dt) + (x^4 dt - tx^3 dx) = 0.$$

Поскольку уравнения $t^2 dx + tx dt = 0$ и $x^4 dt - tx^3 dx = 0$ являются уравнениями с разделяющимися переменными, то для нахождения интегрирующего множителя воспользуемся пятым способом.

Решая уравнение $t^2 dx + tx dt = 0$, находим его общий интеграл $tx - C = 0$, то есть $u_1(t, x) = tx$, и интегрирующий множитель $\mu_1(t, x) = \frac{1}{t^2 x}$.

Решая уравнение $x^4 dt - tx^3 dx = 0$, находим его общий интеграл $\frac{x}{t} - C = 0$, то есть $u_2(t, x) = \frac{x}{t}$, и интегрирующий множитель $\mu_2(t, x) = \frac{1}{tx^4}$.

Записываем теперь уравнение (2.28):

$$\mu_1(t, x) \Phi_1(u_1(t, x)) = \frac{1}{t^2 x} \Phi_1(tx) = \mu_2(t, x) \Phi_2(u_2(t, x)) = \frac{1}{tx^4} \Phi_2\left(\frac{x}{t}\right), \quad \frac{x^2}{t^2} \Phi_1(t, x) = \frac{1}{tx} \Phi_2\left(\frac{x}{t}\right),$$

откуда $\Phi_1(z) = \frac{1}{z}$ ($z = tx$), $\Phi_2(z) = z^2$ ($z = \frac{x}{t}$) и интегрирующий множитель $\mu(t, x)$:

$$\frac{1}{t^2 x} \Phi_1(tx) = \frac{1}{tx} \frac{1}{t^2 x} = \frac{1}{t^3 x^2}, \quad \frac{1}{tx^4} \Phi_2\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x^2}{t^2} \frac{1}{tx^4} = \frac{1}{t^3 x^2},$$

то есть $\mu(t, x) = \frac{1}{t^3 x^2}$.

Умножая исходное уравнение на $\mu(t, x)$, получаем

$$\frac{t^2 - tx^3}{t^3 x^2} dx + \frac{x^4 + tx}{t^3 x^2} dt = 0.$$

Полученное уравнение решаем, следуя алгоритму решения уравнения в полных дифференциалах.

1. $M(t, x) = \frac{t - x^3}{t^2 x^2}$, $N(t, x) = \frac{x^3 + t}{t^3 x}$. Проверяем условие (2.21):

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial t} = \frac{t^2 x^2 - 2tx^2(t - x^3)}{t^4 x^4} = \frac{2x^3 - t}{t^3 x^2}, \quad \frac{\partial N(t, x)}{\partial x} = \frac{3t^3 x^3 - t^3(x^3 + t)}{t^6 x^2} = \frac{2x^3 - t}{t^3 x^2}.$$

Следовательно, рассматриваемое уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

2. Найдем интегралы:

$$\int M(t, x) dx = \int \frac{t - x^3}{t^2 x^2} dx = \int \frac{1}{tx^2} dx - \int \frac{x}{t^2} dx = -\frac{1}{tx} - \frac{x^2}{2t^2} + \varphi(t),$$

$$\int N(t, x) dt = \int \frac{x^3 + t}{t^3 x} dt = \int \frac{x^2}{t^3} dt + \int \frac{1}{xt^2} dt = -\frac{x^2}{2t^2} - \frac{1}{tx} + \psi(x).$$

3. Записывая уравнение (2.22), $-\frac{1}{tx} - \frac{x^2}{2t^2} + \varphi(t) = -\frac{x^2}{2t^2} - \frac{1}{tx} + \psi(x)$, находим $\varphi(t) = 0$, $\psi(x) = 0$.

4. Общий интеграл заданного уравнения: $-\frac{x^2}{2t^2} - \frac{1}{tx} - C_1 = 0$. Умножая на $2t^2x$, имеем $x^3 + 2t + Ct^2x = 0$, где $C = 2C_1$.

Заметим, что в полученную совокупность "потерянные" при домножении на $\mu(t, x)$ решения $x = 0$ и $t = 0$ входят при $C = \pm\infty$, а "лишних" решений нет.

Пример 2.24. Решить уравнение:

$$(3t^2x - t) dx + (t^2 + 2t + x) dt = 0.$$

Решение. Перегруппировав слагаемые, приведем уравнение к виду (2.27), где $M_1(t, x) = -t$, $M_2(t, x) = 3t^2x$, $N_1(t, x) = x$, $N_2(t, x) = t^2 + 2t$:

$$(x dt - t dx) + ((t^2 + 2t) dt + 3t^2x dx) = 0.$$

Поскольку уравнения $x dt - t dx = 0$ и $(t^2 + 2t) dt + 3t^2x dx = 0$ являются уравнениями с разделяющимися переменными, то для нахождения интегрирующего множителя воспользуемся пятым способом.

Решая уравнение $x dt - t dx = 0$, находим его общий интеграл $\frac{x}{t} - C = 0$, то есть $u_1(t, x) = \frac{x}{t}$, и интегрирующий множитель $\mu_1(t, x) = \frac{1}{tx}$.

Решая уравнение $(t^2 + 2t) dt + 3t^2x dx = 0$, находим его общий интеграл $3x^2 + 4 \ln|t| + 2t - C = 0$, то есть $u_2(t, x) = 3x^2 + 4 \ln|t| + 2t$, и интегрирующий множитель $\mu_2(t, x) = \frac{1}{3t^2}$.

Теперь записываем уравнение (2.28):

$$\begin{aligned}\mu_1(t, x) \varphi_1(u_1(t, x)) &= \frac{1}{tx} \varphi_1\left(\frac{x}{t}\right) = \\ &= \mu_2(t, x) \varphi_2(u_2(t, x)) = \frac{1}{3t^2} \varphi_2(3x^2 + 4 \ln |t| + 2t), \quad \varphi_1\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{3t^2} \varphi_2(3x^2 + 4 \ln |t| + 2t),\end{aligned}$$

из которого находим $\varphi_1(z) = \frac{1}{3}z$, $\varphi_2(z) = 1$ и интегрирующий множитель $\mu(t, x)$:

$$\frac{1}{tx} \varphi_1\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{tx} \frac{x}{3t} = \frac{1}{3t^2},$$

$$\frac{1}{3t^2} \varphi_2(3x^2 + 4 \ln |t| + 2t) = \frac{1}{3t^2},$$

то есть $\mu(t, x) = \frac{1}{3t^2}$.

Умножая исходное уравнение на $\mu(t, x)$, получаем

$$\frac{3t^2x - t}{3t^2} dx + \frac{t^2 + 2t + x}{3t^2} dt = 0.$$

Полученное уравнение решаем, следуя алгоритму решения уравнения в полных дифференциалах.

1. $M(t, x) = x - \frac{1}{3t}$, $N(t, x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3t} + \frac{x}{3t^2}$. Проверяем условие (2.21):

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{3t^2}, \quad \frac{\partial N(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{3t^2}.$$

Следовательно, рассматриваемое уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

2. Найдем интегралы:

$$\int M(t, x) dx = \int \left(x - \frac{1}{3t} \right) dx = \frac{1}{2} x^2 - \frac{x}{3t} + \varphi(t),$$

$$\int N(t, x) dt = \int \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3t} + \frac{x}{3t^2} \right) dt = \frac{1}{3} t + \frac{2}{3} \ln |t| - \frac{x}{3t} + \psi(x).$$

3. Записывая уравнение (2.22)

$$\frac{1}{2} x^2 - \frac{x}{3t} + \varphi(t) = \frac{1}{3} t + \frac{2}{3} \ln |t| - \frac{x}{3t} + \psi(x),$$

находим $\varphi(t) = \frac{1}{3} t + \frac{2}{3} \ln |t|$, $\psi(x) = \frac{1}{2} x^2$.

4. Общий интеграл заданного уравнения:

$$\frac{1}{2} x^2 - \frac{x}{3t} + \frac{1}{3} t + \frac{2}{3} \ln |t| - C_1 = 0$$

или, домножая на $6t$,

$$3tx^2 - 2x + 2t^2 + 4t \ln |t| + Ct = 0, \text{ где } C = -6C_1.$$

Заметим, что в полученную совокупность "потерянное" при домножении на $\mu(t)$ решение $t = 0$ входит при $C = \pm\infty$, а "лишних" решений нет.

Пример 2.25. Решить уравнение:

$$(2tx^3 - 3t^2) dx + (x^4 - 4tx) dt = 0.$$

Решение. Можно проверить, что ни один из способов 1-5 отыскания интегрирующего множителя не подходит для данного уравнения, поэтому воспользуемся шестым способом, то есть запишем и решим уравнение (2.24). Для заданного уравнения

$$\begin{aligned} M(t, x) &= 2tx^3 - 3t^2, \quad N(t, x) = x^4 - 4tx, \\ \frac{\partial N(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial M(t, x)}{\partial t} &= 4x^3 - 4t - 2x^3 + 6t = 2x^3 + 2t, \end{aligned}$$

поэтому уравнение (2.24) имеет вид

$$(2tx^3 - 3t^2) \frac{\partial \ln \mu(t, x)}{\partial t} - (x^4 - 4tx) \frac{\partial \ln \mu(t, x)}{\partial x} = 2x^3 + 2t.$$

Функцию $\mu(t, x)$ будем искать в виде $\mu(z)$, где $z = tx$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \mu(z)}{\partial t} &= \frac{1}{\mu(z)} \frac{\partial \mu(z)}{\partial t} = \frac{1}{\mu(z)} \frac{\partial \mu(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{x}{\mu(z)} \frac{\partial \mu(z)}{\partial z}, \\ \frac{\partial \ln \mu(z)}{\partial x} &= \frac{1}{\mu(z)} \frac{\partial \mu(z)}{\partial x} = \frac{1}{\mu(z)} \frac{\partial \mu(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{t}{\mu(z)} \frac{\partial \mu(z)}{\partial z}. \end{aligned}$$

Подставляем полученные выражения в уравнение для $\mu(t, x) = \mu(z)$:

$$(2tx^3 - 3t^2) \frac{x}{\mu(z)} \frac{\partial \mu(z)}{\partial z} - (x^4 - 4tx) \frac{t}{\mu(z)} \frac{\partial \mu(z)}{\partial z} = 2x^3 + 2t.$$

В полученном уравнении перегруппируем слагаемые:

$$\frac{1}{\mu(z)} \frac{\partial \mu(z)}{\partial z} (2tx^4 - 3t^2x - tx^4 + 4t^2x) = 2x^3 + 2t,$$

откуда получаем $\frac{1}{\mu(z)} \frac{\partial \mu(z)}{\partial z} = \frac{2(x^3 + t)}{tx^4 + t^2x}$, или, после сокращения на $x^3 + t$:

$$\frac{1}{\mu(z)} \frac{\partial \mu(z)}{\partial z} = \frac{2}{tx}.$$

Поскольку $tx = z$, то последнее уравнение представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $\mu(z)$:

$$\frac{1}{\mu(z)} \frac{d\mu(z)}{dz} = \frac{2}{z}.$$

Полученное уравнение решаем как уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2}{z} dz, \ln \mu = 2 \ln z + \ln C, \ln \mu = \ln Cz^2, \mu = Cz^2.$$

Таким образом, интегрирующим множителем является функция $\mu(t, x) = \mu(tx) = Ct^3x^2$ для любой постоянной C . Полагая $C = 1$, выберем интегрирующий множитель $\mu(t, x) = t^3x^2$.

Умножая заданное уравнение на $\mu(t, x)$, получаем

$$(2t^3x^5 - 3t^4x^2) dx + (t^2x^6 - 4t^3x^3) dt = 0.$$

Полученное уравнение решаем, следуя алгоритму решения уравнения в полных дифференциалах.

1. $M(t, x) = 2t^3x^5 - 3t^4x^2$, $N(t, x) = t^2x^6 - 4t^3x^3$. Проверяем условие (2.21):

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial t} = 6t^2x^5 - 12t^3x^2, \quad \frac{\partial N(t, x)}{\partial x} = 6t^2x^5 - 12t^3x^2.$$

Следовательно, рассматриваемое уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

2. Найдём интегралы:

$$\begin{aligned} \int M(t, x) dx &= \int (2t^3x^5 - 3t^4x^2) dx = \frac{1}{3} t^3x^6 - t^4x^3 + \varphi(t), \\ \int N(t, x) dt &= \int (t^2x^6 - 4t^3x^3) dt = \frac{1}{3} t^3x^6 - t^4x^3 + \psi(x). \end{aligned}$$

3. Записывая уравнение (2.22)

$$\frac{1}{3} t^3x^6 - t^4x^3 + \varphi(t) = \frac{1}{3} t^3x^6 - t^4x^3 + \psi(x),$$

находим $\varphi(t) = 0$, $\psi(x) = 0$.

4. Общий интеграл заданного уравнения: $\frac{1}{3} t^3x^6 - t^4x^3 - C = 0$.

Заметим, что умножение на $\mu(t, x)$ могло привести к появлению "лишних" решений $\mu(t, x) = 0$, но непосредственно проверяется, что функции $t = 0$ и $x = 0$ являются решениями заданного уравнения. "Потерянных" решений также нет, поскольку $\mu(t, x)$ определена для всех (t, x) .

Пример 2.26. Решить уравнение:

$$\left(tx^2 + \frac{t \ln t}{x} \right) dx + dt = 0.$$

Решение. Можно проверить, что ни один из способов 1-5 отыскания интегрирующего множителя не подходит для данного уравнения, поэтому воспользуемся шестым способом, то есть запишем и решим уравнение (2.24). Для заданного уравнения

$$M(t, x) = tx^2 + \frac{t \ln t}{x}, \quad N(t, x) = 1, \quad \frac{\partial N(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial M(t, x)}{\partial t} = -x^2 - \frac{\ln t}{x} - \frac{1}{x},$$

поэтому уравнение (2.24) имеет вид

$$\left(tx^2 + \frac{t \ln t}{x} \right) \frac{\partial \ln \mu(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial \ln \mu(t, x)}{\partial x} = -x^2 - \frac{\ln t}{x} - \frac{1}{x},$$

или, после домножения на x :

$$(tx^3 + t \ln t) \frac{\partial \ln \mu(t, x)}{\partial t} - x \frac{\partial \ln \mu(t, x)}{\partial x} = -x^3 - \ln t - 1.$$

Функцию $\mu(t, x)$ будем искать в виде $\mu(z)$, где $z = x/t$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции, получаем

$$\frac{\partial \ln \mu(z)}{\partial t} = \frac{1}{\mu(z)} \frac{\partial \mu(z)}{\partial t} = \frac{1}{\mu(z)} \frac{\partial \mu(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu(z)} \frac{\partial \mu(z)}{\partial z} \frac{x}{t^2},$$

$$\frac{\partial \ln \mu(z)}{\partial x} = \frac{1}{\mu(z)} \frac{\partial \mu(z)}{\partial x} = \frac{1}{\mu(z)} \frac{\partial \mu(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\mu(z)} \frac{\partial \mu(z)}{\partial z} \frac{1}{t}.$$

Подставляем полученные выражения в уравнение для $\mu(t, x) = \mu(z)$:

$$-(tx^3 + t \ln t) \frac{1}{\mu(z)} \frac{\partial \mu(z)}{\partial z} \frac{x}{t^2} - x \frac{1}{\mu(z)} \frac{\partial \ln \mu(z)}{\partial z} \frac{1}{t} = -x^3 - \ln t - 1.$$

Упростим полученное уравнение и перегруппируем слагаемые:

$$\frac{1}{\mu(z)} \frac{\partial \mu(z)}{\partial z} \frac{(-x^4 - x \ln t - x)}{t} = -x^3 - \ln t - 1,$$

или, после сокращения на $(-x^3 - \ln t - 1)$: $\frac{1}{\mu(z)} \frac{\partial \mu(z)}{\partial z} = 1/x$.

Поскольку $1/x = 1/z$, то последнее уравнение представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функций $\mu(z)$:

$$\frac{1}{\mu(z)} \frac{d\mu(z)}{dz} = \frac{1}{z}.$$

Полученное уравнение решаем как уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{dz}{z}, \ln \mu = \ln z + \ln C, \ln \mu = \ln Cz, \mu = Cz.$$

Таким образом, интегрирующим множителем является функция $\mu(t, x) = \mu(x) = C x^{1/4}$ для любой постоянной C . Полагая $C = 1$, выберем интегрирующий множитель $\mu(t, x) = x^{1/4}$.

Умножая заданное уравнение на $\mu(t, x)$, получаем

$$(x^3 + \ln t) dx + x^{5/4} dt = 0.$$

Полученное уравнение решаем, следуя алгоритму решения уравнения в полных дифференциалах.

1. $M(t, x) = x^3 + \ln t$, $N(t, x) = x^{5/4}$. Проверяем условие (2.21):

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{t}, \quad \frac{\partial N(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{t}.$$

Следовательно, рассматриваемое уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

2. Найдем интегралы:

$$\int M(t, x) dx = \int (x^3 + \ln t) dx = \frac{1}{4} x^4 + x \ln t + \varphi(t),$$

$$\int N(t, x) dt = \int x^{5/4} dt = x \ln t + \psi(x).$$

3. Записывая уравнение (2.22)

$$\frac{1}{4} x^4 + x \ln t + \varphi(t) = x \ln t + \psi(x),$$

находим $\varphi(t) = 0$, $\psi(x) = \frac{1}{4} x^4$.

4. Общий интеграл заданного уравнения: $\frac{1}{4} x^4 + x \ln t - C = 0$.

Заметим, что умножение на $\mu(t, x)$ могло привести к появлению "лишних" решений $\mu(t, x) = 0$. Действительно, функция $x = 0$ входит в полученную совокупность при $C = 0$, но не является решением заданного уравнения, так как $M(t, x)$ не определена при $x = 0$, поэтому $x = 0$ надо исключить из выражения для полного интеграла. "Потерянным" решением могла оказаться функция $t = 0$, но она решением заданного уравнения не является, так как $M(t, x)$ определена только для $t > 0$. Окончательно получим: $\frac{1}{4} x^4 + x \ln t - C = 0$, $x \neq 0$.

2.4. Линейные уравнения

2.4.1. Метод решения

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка - это уравнение, которое может быть записано в форме, получающейся из (1.22) при $n = 1$, $a_1(t) = 1$:

$$x' + a_0(t)x = f(t). \quad (2.29)$$

Коэффициент $a_0(t)$ и функцию $f(t)$ будем предполагать непрерывными на некотором промежутке. Тогда функция $f(t, x) = f(t) - a_0(t)x$ (правая часть уравнения (2.1)) удовлетворяет условиям теоремы 1.1, поэтому линейное уравнение не имеет особых решений и задача Коши:

$$x' + a_0(t)x = f(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.30)$$

имеет единственное решение при любых начальных условиях.

Уравнение (2.29) *неоднородное*. Соответствующее ему *однородное* уравнение имеет вид

$$x' + a_0(t)x = 0. \quad (2.31)$$

Уравнение (2.31) является уравнением с разделяющимися переменными (см. разд.2.1). Разделя переменные при $x \neq 0$ и интегрируя, находим его решение:

$$\ln|x| - \ln C_1 = - \int a_0(t) dt, \quad C_1 > 0.$$

После потенцирования и раскрытия модуля, решение можно записать в виде:

$$x(t) = Ce^{-\int a_0(t) dt}, \quad C \neq 0.$$

"Потерянное" при разделении переменных решение $x(t) = 0$ входит в полученную совокупность при $C = 0$. Таким образом, общее решение однородного уравнения (2.31) имеет вид

$$x(t) = Ce^{-\int a_0(t) dt}, \quad (2.32)$$

где C - произвольная постоянная.

Решение соответствующего неоднородного уравнения можно получить *методом вариации произвольной постоянной* (методом Лагранжа). Этот метод основан на том, что форма записи решения неоднородного уравнения такая же, что и у соответствующего однородного, с той лишь разницей, что произвольную постоянную C следует считать некоторой функцией переменной t , $C = C(t)$, то есть

$$x(t) = C(t)e^{-\int a_0(t) dt}. \quad (2.33)$$

Функция $C(t)$ должна быть такой, чтобы при подстановке (2.33) в уравнение (2.29) последнее обращалось в тождество. Подставляя $x(t)$ и

$$x'(t) = C'(t)e^{-\int a_0(t)dt} + C(t)\left(e^{-\int a_0(t)dt}\right)' = C'(t)e^{-\int a_0(t)dt} - C(t)a_0(t)e^{-\int a_0(t)dt}$$

получаем для определения функции $C(t)$ равенство:

$$C'(t)e^{-\int a_0(t)dt} = f(t) \quad \text{или} \quad C'(t) = f(t)e^{\int a_0(t)dt}$$

Интегрируя, находим выражение для $C(t)$:

$$C(t) = \int f(t)e^{\int a_0(t)dt} dt + C. \quad (2.34)$$

Подставляя полученное выражение в (2.33), получаем общее решение линейного неоднородного уравнения (2.29) в виде

$$x(t) = e^{-\int a_0(t)dt} \int f(t)e^{\int a_0(t)dt} dt + Ce^{-\int a_0(t)dt} \quad (2.35)$$

Заметим, что первое слагаемое в формуле (2.35) является частным решением линейного неоднородного уравнения (2.29), в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Второе слагаемое является общим решением соответствующего однородного уравнения (2.31). Этот результат подтверждает известное свойство решений неоднородного уравнения (см. теорему 1.3).

Приведенные рассуждения позволяют сформулировать алгоритм решения уравнения (2.29).

Алгоритм решения линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка методом Лагранжа

1. Выписать для заданного неоднородного уравнения (2.29) соответствующее однородное уравнение (2.31).
2. Найти общее решение однородного уравнения как уравнения с разделяющимися переменными (можно использовать формулу (2.32)).
3. Выписать вид искомого общего решения неоднородного уравнения, используя полученное выражение для общего решения однородного уравнения, то есть выписать соотношение (2.33).
4. Подставляя выписанное в п.3 соотношение в исходное неоднородное уравнение, найти функцию $C(t)$ (можно использовать формулу (2.34)). Подставив найденную функцию в (2.33), выписать общее решение в виде (2.35).
5. Если требуется решить задачу Коши, то следует определить значение произвольной постоянной, входящей в запись общего решения, используя начальное условие.

Пример 2.27. Решить уравнение:

$$tx' + 3x = t^2.$$

Решение. Переписывая уравнение в виде $x' + \frac{3}{t}x = t$ и учитывая, что $t=0$ не является его решением, заключаем, что заданное уравнение является линейным неоднородным уравнением, поэтому для его решения можно использовать приведенный алгоритм.

1. Выписываем однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному: $x' + \frac{3}{t}x = 0$.

2. Разделяя переменные при $x \neq 0$ и интегрируя, находим общее решение однородного уравнения: $x(t) = \frac{C}{t^3}$ (отметим, что решение $x(t) = 0$ входит в эту совокупность при $C = 0$).

3. Решение заданного неоднородного уравнения ищем в виде $x(t) = \frac{C(t)}{t^3}$, где $C(t)$ - неизвестная функция.

4. Подставляя $x(t) = \frac{C(t)}{t^3}$ и $x'(t) = \frac{C'(t)}{t^3} - \frac{3C(t)}{t^4}$ в уравнение, получаем

$$\frac{C'(t)}{t^3} - \frac{3C(t)}{t^4} + \frac{3}{t} \frac{C(t)}{t^3} = t.$$

Отсюда $C'(t) = t^4$ и $C(t) = \frac{t^5}{5} + C$. Общее решение заданного уравнения имеет вид $x(t) = \frac{t^2}{5} + \frac{C}{t^3}$.

Отметим, что в рассмотренном уравнении $a_0(t) = \frac{3}{t}$, $f(t) = t$, поэтому общее решение однородного уравнения можно записать по формуле (2.32):

$$x(t) = Ce^{\int -a_0(t)dt} = Ce^{-\int \frac{3dt}{t}} = Ce^{-3 \ln t} = Ce^{\ln(t^{-3})} = \frac{C}{t^3},$$

а функцию $C(t)$ можно найти по формуле (2.34):

$$C(t) = \int f(t)e^{\int a_0(t)dt}dt + C = \int te^{\int \frac{3}{t}dt}dt + C = \int t t^3 dt + C = \frac{t^5}{5} + C.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения: $x(t) = \frac{C(t)}{t^3} = \frac{t^2}{5} + \frac{C}{t^3}$, что совпадает с полученным ранее. Можно также записать решение непосредственно по формуле (2.35).

Пример 2.28. Решить задачу Коши:

$$x' + 2x = 2 - 3t, \quad x(0) = 0.$$

Решение. 1,2. Общее решение однородного уравнения $x' + 2x = 0$ имеет вид $x(t) = Ce^{-2t}$.

3,4. Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде $x(t) = C(t)e^{-2t}$. Подставляя $x(t)$ и $x'(t) = C'(t)e^{-2t} - 2C(t)e^{-2t}$ в заданное уравнение, получаем $C'(t)e^{-2t} = 2 - 3t$. Отсюда $C'(t) = e^{2t}(2 - 3t)$, $C(t) = \int e^{2t}(2 - 3t) dt$. Применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int e^{2t} (2 - 3t) dt = \frac{1}{2} (2 - 3t) e^{2t} - \frac{1}{2} \int (-3) e^{2t} dt = \frac{1}{2} (2 - 3t) e^{2t} + \frac{3}{4} e^{2t} + C$$

и в результате получаем $C(t)$, а следовательно, и общее решение неоднородного уравнения:

$$x(t) = C(t) e^{-2t} = ((1,75 - 1,5t) e^{2t} + C) e^{-2t} \text{ или } x(t) = 1,75 - 1,5t + C e^{-2t}.$$

5. Из начального условия $x(0) = 0$ находим значение постоянной C , $C = -1,75$. Таким образом, частное решение уравнения, являющееся решением поставленной задачи Коши, имеет вид $x(t) = 1,75 - 1,5t - 1,75 e^{-2t}$.

З а м е ч а н и е 2.4. Иногда уравнение, не являющееся линейным относительно неизвестной функции $x(t)$, то есть уравнением вида (2.29), становится линейным, если в нем поменять ролями x и t , а именно, взять за аргумент x , а за неизвестную функцию t , то есть $t = t(x)$. Линейное уравнение такого типа можно записать в виде

$$t' + a_0(x) t = f(x). \quad (2.36)$$

Пример 2.29. Решить уравнение:

$$x = tx' + x' \ln x.$$

Решение. Уравнение не является линейным относительно неизвестной функции $x(t)$. Допустим, что неизвестной является функция $t = t(x)$. Уравнение можно переписать следующим образом: $x'(t + \ln x) = x$ или $\frac{dt}{dx} \frac{t + \ln x}{x} = 1$. Полученное уравнение $t' - \frac{1}{x} t = \frac{\ln x}{x}$ является линейным относительно функции $t(x)$. Решим его методом Лагранжа.

1. Записываем однородное уравнение, соответствующее полученному выше неоднородному: $\frac{dt}{dx} - \frac{t}{x} = 0$.

2. Разделяя переменные и интегрируя, получаем общее решение однородного уравнения $t(x) = Cx$.

3. Решение неоднородного уравнения ищем в виде $t(x) = C(x)x$.

4. Подставляя в неоднородное уравнение выражения $t(x) = C(x)x$ и $t'(x) = C'(x)x + C(x)$, получаем: $C'(x)x = \frac{\ln x}{x}$ или $C'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Интегрируя по частям, находим функцию $C(x)$:

$$C(x) = \int \frac{\ln x}{x^2} dx = - \int \ln x d\left(\frac{1}{x}\right) = - \left(\frac{1}{x} \ln x - \int \frac{dx}{x^2}\right) = - \frac{1 + \ln x}{x} + C.$$

Общее решение рассматриваемого уравнения: $t = C(x)x = Cx - 1 - \ln x$.

З а м е ч а н и е 2.5. Для решения уравнения (2.29) можно использовать *метод подстановки* (метод Бернулли). Этот метод состоит в следующем:

а) решение уравнения ищется в виде произведения двух неизвестных функций $u(t)$ и $v(t)$, то есть $x(t) = u(t)v(t)$;

б) подстановка $x = uv$ приводит уравнение (2.29) к виду

$$u[v' + a_0(t)v] + v u' = f(t);$$

в) функция $v(t)$ определяется как любое частное решение уравнения $v' + a_0(t)v = 0$, тем самым обращается в нуль коэффициент при u (этот коэффициент можно представить в виде (2.32) при некотором значении постоянной C , например $C = 1$);

г) найденную функцию $v(t)$ подставляем в уравнение из п."б" и получаем для нахождения функции $u(t)$ следующее уравнение с разделяющимися переменными:

$$u' = \frac{f(t)}{v(t)};$$

д) искомое решение выписывается в виде произведения двух функций, полученных в пп."в" и "г".

Пример 2.30. Решить уравнение:

$$(x^2 - 6t)x' + 2x = 0.$$

Решение. Уравнение не является линейным относительно функции $x(t)$. Однако, если его переписать в виде $(x^2 - 6t)dx + 2xdt = 0$ или $\frac{dt}{dx} + \frac{(x^2 - 6t)}{2x} = 0$, то можно заметить, что это уравнение является линейным относительно функции $t = t(x)$. Это утверждение становится очевидным, если последнее уравнение привести к виду (2.19), а именно $t' - \frac{3}{x}t = -\frac{1}{2}$. Решим это уравнение методом Бернулли:

а) ищем решение уравнения в виде $t(x) = u(x)v(x)$;

б) подставляя выражения $t = uv$ и $t' = u'v + uv'$ в уравнение, получаем

$$u'v + uv' - \frac{3uv}{x} = -\frac{1}{2} \text{ или } u(v' - 3\frac{v}{x}) + u'v = -\frac{1}{2};$$

в) функцию $v(x)$ найдем как частное решение уравнения $v' - 3\frac{v}{x} = 0$. Разделяя переменные и интегрируя, находим общее решение последнего уравнения: $v(x) = Cx^3$ и в качестве функции $v(x)$ возьмем частное решение, получающееся при $C = 1$, а именно $v(x) = x^3$;

г) подставляя $v(x) = x^3$ в уравнение из п."б", получаем

$$x^3 u' = -\frac{1}{2} \text{ или } u'(x) = -\frac{1}{2x^2}.$$

Интегрируя его, находим $u(x) = \frac{1}{2x} + C$;

д) выписываем решение исходного уравнения $t(x) = u(x)v(x) = \left(\frac{1}{2x} + C\right)x^3$ или $t = \frac{x^2}{2} + Cx^3$; заметим, что "потерянное" при разделении переменных ре-

шение $x(t) = 0$ входит в полученное выражение при $C = \infty$, так как его можно переписать в виде $x^3 = \frac{2t - x^2}{C}$.

2.4.2. Уравнения, приводящиеся к линейным. Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение

$$x' + a(t)x = f(t)x^m, \quad (2.37)$$

где m - любое число, $m \neq 0$, $m \neq 1$, (при $m = 0$ или $m = 1$ уравнение (2.37) является линейным).

Сравнивая уравнения (2.37) и (2.29), можно заметить, что уравнение (2.37) после деления обеих его частей на x^m ($x \neq 0$) принимает вид

$$\frac{x'}{x^m} + a(t) \frac{1}{x^{m-1}} = f(t)$$

и является линейным относительно функции $\frac{1}{x^{m-1}}$. Действительно, вводя

новую функцию $z = \frac{1}{x^{m-1}}$ и замечая, что при этом $\frac{x'}{x^m} = \frac{z'}{1-m}$, получаем для

$z(t)$ следующее уравнение: $\frac{z'}{1-m} + a(t)z = f(t)$, которое является линейным от-

носительно функции $z(t)$. Итак, замена $z = \frac{1}{x^{m-1}}$ позволяет использовать для решения уравнения Бернулли алгоритм решения линейного уравнения, приведенный в предыдущем разделе. При разделении переменных может быть потеряно решение $x(t) = 0$. Исследование получаемой указанным методом совокупности решений показывает, что при $m > 1$ функция $x(t) = 0$ является частным решением уравнения (2.37), при $0 < m < 1$ - особым решением, а при $m < 0$ функция $x(t) = 0$ не является решением уравнения Бернулли.

З а м е ч а н и е 2.6.

1. Уравнение Бернулли можно решать непосредственно методами вариации (Лагранжа) или подстановки (Бернулли) без предварительного приведения его к линейному.

2. Возможна ситуация, когда дифференциальное уравнение не является уравнением Бернулли относительно функции $x(t)$, но становится таковым, если рассматривать его как уравнение относительно неизвестной функции $t(x)$. Такие уравнения можно записать в виде

$$t' + a(x)t = f(x)t^m. \quad (2.38)$$

Пример 2.31. Решить уравнение:

$$x' + \frac{x}{t} = t^2 x^4.$$

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли с $m = 4$. Разделим обе его части на x^4 : $\frac{x'}{x^4} + \frac{1}{x^3 t} = t^2$ и обозначим $z = \frac{1}{x^3}$. Тогда $z' = -\frac{3}{x^4} x'$, или $\frac{x'}{x^4} = -\frac{1}{3} z'$ и уравнение приводится к линейному: $z' - \frac{3}{t} z = -3t^2$. Решение этого уравнения выпишем непосредственно по формуле (2.35):

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{\int -\frac{3}{t} dt} \left(\int -3t^2 e^{-\int \frac{3}{t} dt} dt + C \right) = e^{3 \ln |t|} \left(\int -3t^2 e^{-3 \ln |t|} dt + C \right) = \\ &= t^3 \left(\int -3t^2 \frac{1}{t^3} dt + C \right) = t^3 (C - 3 \ln |t|). \end{aligned}$$

Возвращаясь к исходной функции $x(t)$, $x = z^{-1/3}$, получаем общее решение заданного уравнения:

$$x(t) = \frac{1}{t(C - 3 \ln |t|)^{1/3}}.$$

"Потерянное" решение $x(t) = 0$ входит в эту совокупность при $C = \infty$.

Пример 2.32. Решить уравнение:

$$x' - \frac{2tx}{1+t^2} = 4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+t^2}} \operatorname{arctg} t.$$

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли с $m = 1/2$. Применим для его решения метод подстановки:

а) положим $x(t) = u(t) v(t)$;

б) подставляя $x = uv$ и $x' = u'v + v'u$ в заданное уравнение и группируя слагаемые, получаем: $u'v + u \left(v' - \frac{2tv}{1+t^2} \right) = 4 \frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{1+t^2}} \operatorname{arctg} t$;

в) функцию $v(t)$ находим как решение уравнения $v' - \frac{2tv}{1+t^2} = 0$; интегрируя это уравнение с разделяющимися переменными, получаем его частное решение $v(t) = 1 + t^2$;

г) подставляя $v(t) = 1 + t^2$ в полученное в п."б" уравнение, получаем уравнение с разделяющимися переменными $u' (1 + t^2) = 4 \sqrt{u} \operatorname{arctg} t$, интегрируя которое, получаем $u = (C + \operatorname{arctg}^2 t)^2$;

д) общее решение $x(t) = u(t) v(t)$ исходного уравнения:

$$x(t) = (1 + t^2)(C + \operatorname{arctg}^2 t)^2.$$

Заметим, что данное уравнение является уравнением Бернулли с $m = \frac{1}{2}$ ($0 < m < 1$). Потерянное при разделении переменных решение $x(t) = 0$ является особым.

Пример 2.33. Решить уравнение:

$$xdt + t(1 - 2tx)dx = 0.$$

Решение. Если рассматривать это уравнение относительно функции $x(t)$ и переписать его в виде $x' + \frac{1}{t(1-2tx)}x = 0$, то видно, что оно не является ни линейным, ни уравнением Бернулли. Заметим, что $x(t) = 0$ является решением уравнения. Далее, полагая $x \neq 0$, запишем его в виде $\frac{dt}{dx} = \frac{(2tx-1)t}{x}$ или $t' + \frac{1}{x} = 2t^2$, то есть как уравнение относительно функции $t(x)$. Это уравнение Бернулли с $m = 2$. Приведем его к линейному с помощью замены $z(x) = \frac{1}{t^2(x)}$. Подставляя $z = \frac{1}{t^2}$ ($t \neq 0$) и $z' = -\frac{t'}{t^3}$ в уравнение, получаем: $z' - z\frac{1}{x} = -2$. Решение этого линейного уравнения записываем по формуле (2.35):

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{-\int -\frac{1}{x} dx} \int -2 e^{\int -\frac{1}{x} dx} dx + C e^{-\int -\frac{1}{x} dx} = \\ &= e^{\ln |x|} \int -2 e^{-\ln |x|} dx + C e^{\ln |x|} = -2x \int \frac{dx}{x} + Cx = -2x \ln |x| + Cx. \end{aligned}$$

Возвращаясь к исходной переменной $t(x)$, $t = \frac{1}{\sqrt{z}}$, получаем общее решение исходного уравнения: $t(x) = \frac{1}{\sqrt{Cx - 2x \ln |x|}}$. "Потерянное" решение $t(x) = 0$ входит в полученную совокупность при $C = \infty$.

Некоторые уравнения первого порядка можно упростить, в частности, привести к линейному уравнению или уравнению Бернулли, если ввести новую функцию, которую можно подобрать, анализируя вид уравнения и учитывая формулы связи функций и их производных.

Так, если в уравнение входит элемент $x' \sin x$, то, учитывая равенство $(\cos x)' = -x' \sin x$, можно попытаться использовать замену $\cos x = y$. В зависимости от вида остальных слагаемых уравнение может быть приведено с помощью такой замены к более простому уравнению. Сказанное относится и к заменам вида $y = e^x$ и $y = x^\alpha$, в случае которых имеют место равенства $y' = x' e^x$, то есть $x' = \frac{y'}{y}$, и $y' = \alpha x^{\alpha-1} x'$, то есть $\frac{x'}{x} = \frac{1}{\alpha} \frac{y'}{y}$.

Пример 2.34. Решить уравнения:

$$\text{а) } (t+1)e^x x' + e^x = \sin 2t; \quad \text{б) } \operatorname{tg} t e^x - t^3 x' + 3t^2 = 0.$$

Решение. Для упрощения уравнений воспользуемся заменой $e^x = y$.

а) Подставляя $e^x = y$ и $y' = x' e^x$ в исходное уравнение, получаем следующее линейное уравнение: $(t+1)y' + y = \sin 2t$ или $y' + \frac{1}{t+1}y = \frac{\sin 2t}{t+1}$. Решение этого уравнения запишем по формуле (2.35)

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{dt}{t+1}} \left(\int e^{\int \frac{dt}{t+1}} \frac{\sin 2t}{t+1} dt + C \right) = e^{-\ln|t+1|} \left(\int e^{\ln|t+1|} \frac{\sin 2t}{t+1} dt + C \right) = \\ &= \frac{1}{t+1} \left(\int \sin 2t dt + C \right) = \frac{1}{t+1} \left(C - \frac{1}{2} \cos 2t \right). \end{aligned}$$

Возвращаясь к переменной x ($e^x = y$), получаем окончательный ответ

$$2e^x(t+1) + \cos 2t = C.$$

б) В результате подстановки $e^x = y$ получаем уравнение

$$y \operatorname{tg} t - t^3 \frac{y'}{y} + 3t^2 = 0 \quad \text{или} \quad y' - \frac{3}{t} y = \frac{\operatorname{tg} t}{t^3} y^2.$$

Это уравнение Бернулли с $m = -2$. Решаем его, вводя замену $z = \frac{1}{y}$:

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{3}{t} \frac{1}{y} = \frac{\operatorname{tg} t}{t^3}, \quad -z' - \frac{3}{t} z = \frac{\operatorname{tg} t}{t^3}, \quad z' + \frac{3}{t} z = -\frac{\operatorname{tg} t}{t^3}.$$

Решение полученного линейного уравнения записываем по формуле (2.35):

$$z = e^{-\int \frac{3dt}{t}} \left(-\int e^{\int \frac{3dt}{t}} \frac{\operatorname{tg} t}{t^3} dt + C \right) = \frac{1}{t^3} \left(C - \int \operatorname{tg} t dt \right) = \frac{1}{t^3} (C + \ln |\cos t|).$$

Возвращаясь к переменной x ($e^x = y$, $y = \frac{1}{z}$, то есть $z = e^{-x}$), получаем окончательный ответ: $e^{-x} t^3 = \ln |\cos t| + C$.

Пример 2.35. Решить уравнение:

$$x'(t^3 + 1) \sin x - 3t^2 \cos x = e^t.$$

Решение. В уравнении присутствует функция $\cos x$ и ее производная $(\cos x)' = -x' \sin x$. Сделаем замену $\cos x = y$. Подставляя в заданное уравнение $\cos x = y$ и $-x' \sin x = y'$, получаем

$$-(t^3 + 1)y' - 3t^2 y = e^t \quad \text{или} \quad y' + \frac{3t^2}{t^3 + 1} y = -\frac{e^t}{t^3 + 1}.$$

Решение полученного линейного уравнения записываем по формуле (2.35):

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{3t^2}{t^3+1} dt} \left(\int e^{\int \frac{3t^2}{t^3+1} dt} \left(-\frac{e^t}{t^3+1} \right) dt + C \right) = e^{-\int \frac{d(t^3+1)}{t^3+1}} \left(\int e^{\int \frac{d(t^3+1)}{t^3+1}} \left(-\frac{e^t}{t^3+1} \right) dt + C \right) = \\ &= e^{-\ln|t^3+1|} \left(\int e^{\ln|t^3+1|} \left(-\frac{e^t}{t^3+1} \right) dt + C \right) = \frac{1}{t^3+1} \left(C - \int e^t dt \right) = \frac{1}{t^3+1} (C - e^t). \end{aligned}$$

Возвращаясь к переменной x ($y = \cos x$), получаем окончательный ответ: $(t^3 + 1) \cos x + e^t = C$.

Пример 2.36. Решить уравнение:

$$(x^2 x' - 2)(t - 1) = x^3.$$

Решение. Замечая, что в уравнении присутствует функция x^3 и ее производная $(x^3)' = 3x^2 x'$, сделаем замену $x^3 = y$. Подставляя $x^3 = y$ и $x^2 x' = \frac{1}{3} y'$ в заданное уравнение, получаем

$$(\frac{1}{3} y' - 2)(t - 1) = y \text{ или } y' - \frac{3}{t-1} y = 6.$$

Решение полученного линейного уравнения записываем по формуле (2.35):

$$\begin{aligned} y &= e^{3 \int \frac{dt}{t-1}} \left(\int e^{-3 \int \frac{dt}{t-1}} 6 dt + C \right) = (t-1)^3 \left(C + \int \frac{6}{(t-1)^3} dt \right) = \\ &= (t-1)^3 \left(C - \frac{3}{(t-1)^2} \right) = C(t-1)^3 - 3(t-1). \end{aligned}$$

Возвращаясь к переменным x ($y = x^3$), получаем окончательный ответ: $x^3 = C(t-1)^3 - 3(t-1)$.

2.5. Уравнение Риккати

2.5.1. Постановка задачи. Случай интегрируемости уравнения Риккати

В предыдущих разделах рассматривались уравнения первого порядка $x' = f(t, x)$, в которых правая часть является либо линейной относительно неизвестной функции $x(t)$, то есть $f(x, t) = \alpha(t)x + \beta(t)$, либо имеет вид $f(x, t) = \alpha(t)x + \beta(t)x^m$. В первом случае это линейное уравнение вида (2.29), а во втором - уравнение Бернулли (2.37), причем последнее сводится к линейно-

му, либо решается непосредственно теми же методами, что и линейное. Рассмотрим теперь уравнение $x' = f(t, x)$, в котором правая часть является квадратичной функцией относительно $x(t)$, то есть $f(t, x) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$, где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ - известные функции.

Дифференциальное уравнение первого порядка:

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t) \quad (2.39)$$

называется *уравнением Риккати*.

Заметим, что при $a(t) = 0$ (2.39) является линейным уравнением, а при $a(t) \neq 0$ - уравнением Бернулли с $m = 2$, поэтому, называя уравнение вида (2.39) уравнением Риккати, всегда будем предполагать $a(t) \neq 0$, $c(t) \neq 0$.

Уравнения Риккати играют особую роль как в теории дифференциальных уравнений, поскольку его исследование связано и с уравнениями второго порядка, и с системами уравнений, так и в многочисленных практических приложениях. Уравнения этого типа часто встречаются при решении разнообразных задач анализа и синтеза технических систем. Вызвано это тем, что уравнения Риккати возникают естественным образом и являются единственным средством получения аналитических результатов при решении важнейших задач оценивания и управления в линейных динамических системах [4, 22, 24, 33, 42].

Будем предполагать, что коэффициенты $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ уравнения Риккати непрерывны на некотором промежутке. При этом предположении правая часть $f(t, x)$ уравнения (2.39) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши (теорема 1.1), поэтому уравнение Риккати не имеет особых решений и задача Коши для него

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.40)$$

имеет единственное решение при любых начальных условиях.

В отношении построения общего решения в квадратурах уравнение Риккати выделяется среди нелинейных уравнений общего вида тем, что знание одного его частного решения дает возможность найти общее решение. Действительно, пусть известно частное решение $x_1(t)$ уравнения (2.39). Проведем замену $x(t) = u(t) + x_1(t)$, где $u(t)$ - новая неизвестная функция. Тогда уравнение (2.39) примет вид $u'(t) - (2a(t)x_1 + b(t))u = a(t)u^2$, то есть получено уравнение Бернулли с $m = 2$ (см. (2.37)). Проводя в последнем уравнении замену $z = \frac{1}{u}$, получим линейное уравнение относительно $z(t)$. Таким образом, уравнение Риккати (2.39) в случае, когда известно одно его частное решение $x_1(t)$, приводится к линейному уравнению заменой переменных:

$$z(t) = x_1(t) + \frac{1}{z(t)}.$$

Укажем два частных случая, в которых частное решение можно легко подобрать:

- 1) если $c(t) = -a(t)\alpha^2 - b(t)\alpha$, то $x_1(t) = \alpha$;
- 2) если $c(t) = -a(t)t^2 - b(t)t + 1$, то $x_1(t) = t$.

Пример 2.37. Решить уравнение Риккати:

$$x' = tx^2 + t^2x - 2t^3 + 1.$$

Решение. В данном уравнении $a(t) = 1 - 2t^3$, $\alpha(t) = t$, $b(t) = t^2$, поэтому $a(t) = -\alpha(t)t^2 - b(t)t + 1$ и частным решением является функция $x(t) = t$, в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Замена переменных $x(t) = t + \frac{1}{z(t)}$ приведет рассматриваемое уравнение к линейному. Действитель-

но, поскольку $x' = 1 - \frac{z'}{z^2}$, то исходное уравнение принимает вид

$$1 - \frac{z'}{z^2} = t \left(t^2 + 2t \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) + t^2 \left(t + \frac{1}{z} \right) - 2t^3 + 1$$

или, после преобразований, $z' + 3t^2z = -t$. Общее решение полученного линейного уравнения запишем по формуле (2.35):

$$z(t) = e^{-\int 3t^2 dt} \left(\int -te^{\int 3t^2 dt} dt + C \right) = e^{-t^3} \left(C - \int te^{t^3} dt \right).$$

Общим решением исходного уравнения является функция $x(t) = t + \frac{e^{t^3}}{C - \int te^{t^3} dt}$. Отметим, что интеграл в выражении справа в элементарных функциях не берется.

К уравнению Риккати могут быть приведены многие встречающиеся в приложениях системы линейных уравнений второго порядка [16]. В этих случаях часто оказывается возможным найти аналитическое решение таких систем именно путем приведения их к соответствующему уравнению Риккати, поскольку для его решения достаточно подобрать хотя бы одно частное решение. Отметим также, что кроме приведенных выше двух простейших случаев, когда требующееся частное решение легко подбирается, в [16] приведен еще ряд аналогичных примеров. Однако в общем случае, когда частное решение не подбирается или коэффициенты уравнения являются переменными (зависят от t), уравнение Риккати, в отличие от всех других типов уравнений, рассмотренных в данном разделе, интегрируется в квадратурах лишь в исключительных случаях. Заметим также, что уравнение Риккати с постоянными коэффициентами $a(t) = a = \text{const}$, $b(t) = b = \text{const}$, $c(t) = c = \text{const}$, являясь уравнением с разделяющимися переменными, а значит, интегрируется в квадратурах всегда.

Рассмотрим некоторые простейшие известные случаи интегрируемости в квадратурах уравнения Риккати с переменными коэффициентами. К таким случаям относятся уравнения Риккати следующих типов:

$$1) \ x' = f(t)(ax^2 + bx + c); \quad 2) \ x' = a \frac{x^2}{t^2} + b \frac{x}{t} + c; \quad 3) \ x' = ax^2 + \frac{b}{t}x + \frac{c}{t^2}.$$

Во всех трех случаях предполагается, что a, b, c - постоянные. Уравнение типа 1) является уравнением с разделяющимися переменными; уравнение типа 2) является однородным; уравнение типа 3) приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $x = \frac{y}{t}$.

Отметим также еще один важный частный случай уравнения Риккати, а именно, предположим, что $a(t) = a = \text{const}$, $b(t) = 0$, $c(t) = ct^m$, где a, c, m - постоянные. При этом уравнение (2.39) принимает вид

$$x' - ax^2 = ct^m \quad (2.41)$$

и называется *специальным уравнением Риккати*.

Уравнение (2.41) полностью исследовано с точки зрения его интегрируемости в элементарных функциях или хотя бы в квадратурах при всех значениях m . Заметим вначале, что при $m = 0$ - это уравнение с разделяющимися переменными, при $m = -2$ - приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $x = \frac{y}{t}$, поэтому интегрируется в квадратурах и, более того, оказывается, что даже в элементарных функциях. Кроме указанных значений m , специальное уравнение Риккати интегрируется в элементарных функциях при любом m , для которого выражение $\frac{m}{2m+4}$ явля-

ется целым числом, то есть для $m = \frac{4k}{1-2k}$, где k - целое. При всех других значениях m уравнение (2.41) не интегрируется не только в элементарных функциях, но и в квадратурах [16].

Учитывая практическую важность уравнения Риккати с переменными коэффициентами, разработан метод, позволяющий свести его к системе линейных уравнений. Этому методу посвящен следующий раздел. В общем случае решение соответствующей системы можно получить численными методами (см. разд. 9, 10), что позволяет на практике реализовывать технические системы, синтез которых связан с решением уравнения Риккати. Кроме того, в некоторых частных случаях для решения линейной системы можно применять методы, излагаемые в разд. 3, 4.

Рассмотрим теперь примеры решения задачи Коши для простейшего уравнения Риккати с постоянными коэффициентами.

Пример 2.38. Решить задачу Коши для уравнения Риккати:

$$x' = x - x^2 - \alpha, \quad x(0) = x_0.$$

Решение. Разделяем переменные в заданном уравнении Риккати с постоянными коэффициентами: $\frac{dx}{-(x^2 - x + \alpha)} = dt$ и интегрируем:

$$t + C = \int \frac{dx}{-(x - \frac{1}{2})^2 - \alpha + \frac{1}{4}}.$$

Последнее равенство определяет общее решение исходного уравнения Риккати. В зависимости от значения параметра α возможны следующие три случая.

1) $\alpha = \frac{1}{4}$. В этом случае решение имеет вид

$$\frac{1}{x - 1/2} = t + C \text{ или } x(t) = 1/2 + \frac{1}{t + C},$$

причем решение $x(t) = 1/2$ входит в данную совокупность при $C = \infty$.

2) $\alpha < 1/4$. Тогда, интегрируя правую часть полученного выше равенства, находим общий интеграл заданного уравнения:

$$t + C = \int \frac{dx}{-(x - 1/2)^2 - \alpha + 1/4} = \int \frac{d(x - 1/2)}{(1/4 - \alpha) - (x - 1/2)^2} = \frac{1}{2\sqrt{1/4 - \alpha}} \ln \left| \frac{x - 1/2 + \sqrt{1/4 - \alpha}}{x - 1/2 - \sqrt{1/4 - \alpha}} \right|$$

или, потенцируя, $x - 1/2 + \sqrt{1/4 - \alpha} = (x - 1/2 - \sqrt{1/4 - \alpha})e^{2\sqrt{1/4 - \alpha}(t+C)}$. Выражая отсюда

x и полагая $e^C = C_1$, находим: $x(t) = 1/2 - \sqrt{1/4 - \alpha} \frac{1 + C_1 e^{2\sqrt{1/4 - \alpha} t}}{1 - C_1 e^{2\sqrt{1/4 - \alpha} t}}$ или, поделив

на экспоненту числитель и знаменатель дроби и приняв $1/C_1 = C$, окончательно получим общее решение уравнения для случая $\alpha < 1/4$:

$$x(t) = 1/2 + \sqrt{1/4 - \alpha} \frac{C + e^{-2\sqrt{1/4 - \alpha} t}}{C - e^{-2\sqrt{1/4 - \alpha} t}}.$$

3) $\alpha > 1/4$. Тогда имеем:

$$t + C = \int \frac{dx}{-(x - 1/2)^2 - \alpha + 1/4} = - \int \frac{d(x - 1/2)}{(\alpha - 1/4) + (x - 1/2)^2} = - \frac{1}{\sqrt{\alpha - 1/4}} \operatorname{arctg} \frac{x - 1/2}{\sqrt{\alpha - 1/4}}$$

или, выражая отсюда x , получаем общее решение уравнения для случая $\alpha > 1/4$: $x(t) = 1/2 + \sqrt{\alpha - 1/4} \operatorname{tg}(C_1 - \sqrt{\alpha - 1/4} t)$, где $C_1 = -C\sqrt{\alpha - 1/4}$.

Для получения решения задачи Коши определим из начального условия $x(0) = x_0$ значение постоянной C для каждого из рассмотренных случаев. При

$\alpha = 1/4$ из равенства $1/2 + 1/C = x_0$ находим, что $C = \frac{2}{2x_0 - 1}$ при $x_0 \neq 1/2$ и $C = \infty$

при $x_0 = 1/2$. В случае $\alpha < 1/4$ из равенства $1/2 + \sqrt{1/4 - \alpha} \frac{C + 1}{C - 1} = x_0$ находим, что

$C = \frac{2x_0 + 2\sqrt{1/4 - \alpha} - 1}{2x_0 - 2\sqrt{1/4 - \alpha} - 1}$ при $x_0 \neq 1/2 + \sqrt{1/4 - \alpha}$ и $C = \infty$ при $x_0 = 1/2 + \sqrt{1/4 - \alpha}$. На-

конец, при $\alpha > 1/4$ из равенства $1/2 + \sqrt{\alpha - 1/4} \operatorname{tg} C = x_0$ получаем, что

$C = \operatorname{arctg} \frac{2x_0 - 1}{2\sqrt{\alpha - 1/4}}$ при любом x_0 .

Подставляя найденные значения C в полученные выше общие решения, будем иметь решения поставленной задачи Коши для каждого из рассмотренных случаев значений параметра α . Отметим, что решение задачи Коши существует для любых начальных данных $x(0) = x_0$.

Оказывается, что рассматриваемый пример имеет интересную практическую интерпретацию, а именно, описывает эволюцию популяции рыбы при проведении промыслового лова.

Предположим, что имеется закрытый водоем, в котором при обычных природных условиях может проживать известное количество рыбы, которое

мы принимаем за 1. К моменту начала промыслового лова в водоеме оказалось рыбы в условном количестве x_0 , которое может быть как больше, так и меньше 1. Для отлова рыбы устанавливается квота α , показывающая, какая часть популяции рыбы вылавливается за сезон. Тогда математическая модель рыболовства описывается рассмотренной в данном примере задачей Коши для уравнения Риккати [3]. Полученное выше решение этой задачи позволяет провести анализ описанной модели. С этой целью исследуем на устойчивость полученное решение во всех трех случаях.

1) $\alpha = 1/4$. В этом случае решение $x(t) = 1/2$, получающееся при $x_0 = 1/2$, описывает установившийся режим модели рыболовства. Если $x_0 > 1/2$, то

$C = \frac{2}{2x_0 - 1} > 0$, $t + C > 0$ и из равенства $x(t) = 1/2 + \frac{1}{t + C}$ следует, что $x(t) > 1/2$ и

$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1/2$. Если $x_0 < 1/2$, то $C < 0$, и, следовательно, $x(t) < 1/2$. В последнем

случае отметим также, что найдется такой момент времени t_1 , что $x(t_1) = 0$, а

именно, $1/2 + \frac{2x_0 - 1}{(2x_0 - 1)t_1 + 2} = 0$ при $t_1 = \frac{4x_0}{1 - 2x_0}$. Возвращаясь к приведенной

интерпретации задачи, заключаем, что обращение в нуль $x(t)$ означает полное исчезновение всей популяции. Заметим также, что если в рассматриваемой модели в этом случае допустить воздействия малых случайных возмущений, действующих на популяцию после выхода на установившийся режим и приводящих к тому, что $x(t)$ окажется меньше $1/2$, то это приведет к катастрофе - исчезновению всей популяции. Изображение семейства решений в данном случае приведено на рис.2.4.

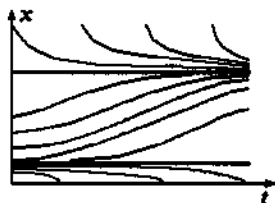


Рис.2.3

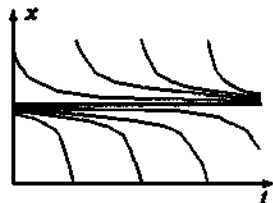


Рис.2.4

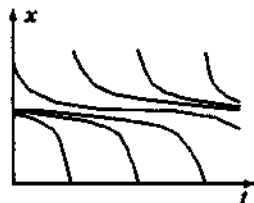


Рис.2.5

2) $\alpha < 1/4$. В данном случае решение имеет вид

$$x(t) = 1/2 + \sqrt{1/4 - \alpha} \frac{C + e^{-2\sqrt{1/4 - \alpha} t}}{C - e^{-2\sqrt{1/4 - \alpha} t}},$$

так что $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1/2 + \sqrt{1/4 - \alpha}$. Дополнительные исследования функции $x(t)$

показывают, что ситуация, когда $x(t) = 0$, возможна лишь для малых значений x_0 . Таким образом, при достаточном запасе рыбы и квоте отлова, не превосходящей $1/4$, рассматриваемая модель рыболовства имеет устойчивый режим. Изображение семейства решений в данном случае приведено на рис.2.3.

3) $\alpha > 1/4$. В данном случае решение имеет вид

$$x(t) = 1/2 + \sqrt{\alpha - 1/4} \operatorname{tg}(C - \sqrt{\alpha - 1/4}t), \quad C = \operatorname{arctg} \frac{2x_0 - 1}{2\sqrt{\alpha - 1/4}},$$

так что при любом начальном условии x_0 решение $x(t)$ обращается в нуль в некоторый момент времени t_1 . Действительно, равенство $x(t_1) = 0$ означает

$$\operatorname{tg}(C - \sqrt{\alpha - 1/4}t_1) = -\frac{1}{2\sqrt{\alpha - 1/4}}, \quad \text{откуда } t_1 = \frac{C + \operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{\alpha - 1/4}}}{\sqrt{\alpha - 1/4}}.$$

Таким образом, превышение квоты отлова $\alpha = 1/4$ неминуемо приведет к катастрофе. Изображение семейства решений приведено на рис.2.5.

Пример 2.39. Решить задачу Коши для уравнения Риккати:

$$x' = -2ax - b^2x^2 + c^2, \quad x(0) = 0, \quad (2.42)$$

где a, b, c - некоторые отличные от нуля числа.

Отметим, что уравнения Риккати такого вида описывают решения многих задач синтеза линейных регуляторов [32,42].

Решение. Поскольку коэффициенты рассматриваемого уравнения постоянны, то это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dx}{-(b^2x^2 + 2ax - c^2)} = dt, \quad t + C_1 = \int \frac{dx}{-b^2(x^2 + \frac{2a}{b^2}x - \frac{c^2}{b^2})}.$$

Преобразуем интеграл, выделяя полный квадрат трехчлена

$$x^2 + \frac{2a}{b^2}x - \frac{c^2}{b^2} = (x + \frac{a}{b^2})^2 - \frac{c^2b^2 + a^2}{b^4}$$

и вводя обозначение $\frac{c^2b^2 + a^2}{b^4} = m^2, \quad x + \frac{a}{b^2} = y:$

$$\int \frac{dy}{-b^2(y^2 - m^2)} = \frac{1}{b^2 2m} \ln \left| \frac{y+m}{y-m} \right| = \frac{1}{2\sqrt{c^2b^2 + a^2}} \ln \frac{b^2x + a + b^2m}{b^2x + a - b^2m}.$$

Обозначив $\beta = \sqrt{a^2 + b^2c^2}$, запишем решение:

$$t + C_1 = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{b^2x + (a + \beta)}{b^2x + (a - \beta)}.$$

Далее потенцируем $b^2x + (a + \beta) = (b^2x + (a - \beta))e^{2\beta C}$, $C = e^{2\beta C_1}$ и выражаем x :

$$x(t) = \frac{(a - \beta)Ce^{2\beta t} - (a + \beta)}{b^2(1 - Ce^{2\beta t})}.$$

Поделив числитель и знаменатель на $e^{2\beta t}$, получим общее решение рассматриваемого уравнения Риккати:

$$x(t) = \frac{(\beta - a)C + (a + \beta)e^{-2\beta t}}{b^2(C - e^{-2\beta t})}.$$

Используя начальное условие $x(0) = 0$, находим $C = \frac{a + \beta}{a - \beta}$, и подставляем его в общее решение. Получаем решение поставленной задачи Коши:

$$x(t) = \frac{(\beta^2 - a^2) - (\beta^2 - a^2)e^{-2\beta t}}{b^2((a + \beta) + (\beta - a)e^{-2\beta t})} = \frac{c^2(1 - e^{-2\beta t})}{a + \beta + (\beta - a)e^{-2\beta t}}.$$

2.5.2. Метод вспомогательных переменных

Рассматриваемый в данном разделе *метод вспомогательных переменных* позволяет свести задачу Коши для уравнения Риккати к задаче для системы линейных уравнений, решение которой с точки зрения приложений искать часто предпочтительнее. В основе метода лежит та же идея, что и в методе подстановки Бернулли. Учитывая эффективность этого метода для решения линейного уравнения (замечание 2.5) и уравнения Бернулли, представим решение уравнения (2.39) в виде $x(t) = \frac{u(t)}{v(t)}$, где $u(t), v(t)$ - новые неизвестные функции, для отыскания которых необходимо получить систему двух уравнений.

Поскольку $c(t) \neq 0$, а значит, функция $x(t) = 0$ не является решением уравнения (2.39), то его можно переписать в виде $\frac{x'}{x} = a(t)x + b(t) + \frac{c(t)}{x}$. Подставляя в полученное равенство выражения $x = \frac{u}{v}$ и $x' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2}$, получаем:

$$\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} = a(t)\frac{u}{v} + c(t)\frac{v}{u} + b(t) \quad \text{или} \quad \frac{u'}{u} - c(t)\frac{v}{u} = \frac{v'}{v} + a(t)\frac{u}{v} + b(t).$$

Если найти функции $u(t), v(t)$, такие, что левая и правая части последнего уравнения обратятся в нуль, то функция $x(t) = \frac{u(t)}{v(t)}$ будет решением уравнения (2.39). Таким образом, для нахождения функций $u(t), v(t)$ получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} u' = c(t)v, \\ v' = -a(t)u - b(t)v. \end{cases} \quad (2.43)$$

Полученная система связана с уравнением (2.39) следующим образом. С одной стороны, если $u(t), v(t)$ - решение системы (2.43), то функция

$$x(t) = \frac{u(t)}{v(t)} - \text{решение уравнения (2.39)}.$$

С другой стороны, если $x(t)$ - решение уравнения (2.39), а $v(t)$ - решение уравнения $v' = -\alpha(t)v - b(t)$, или $v' = [-\alpha(t)x(t) - b(t)]v$, то пара $u(t) = x(t)v(t)$, $v(t)$ является решением системы (2.43).

Система (2.43) позволяет найти в аналитическом виде решение задачи Коши с любым начальным условием $x(t_0) = x_0$. Действительно, выбирая в качестве начальных условий для системы (2.43) равенства $u(t_0) = x_0$, $v(t_0) = 1$,

получаем, что функция $x(t) = \frac{u(t)}{v(t)}$, определяемая решением задачи Коши для системы (2.43), является, во-первых, решением уравнения Риккати (2.39), во-вторых, удовлетворяет начальному условию $x(t_0) = x_0$.

Алгоритм решения задачи Коши для уравнения Риккати методом вспомогательных переменных

1. Составить систему (2.43) для вспомогательных функций $u(t), v(t)$.
2. Найти общее решение системы (2.43), используя методы, изложенные в гл.4.
3. Используя начальные условия $u(t_0) = x_0$, $v(t_0) = 1$, найти значения произвольных постоянных, входящих в запись общего решения системы.
4. Записать решение задачи (2.40) в виде $x(t) = \frac{u(t)}{v(t)}$.

З а м е ч а н и е 2.7.

1. Система (2.43) является системой линейных уравнений, причем в общем случае с переменными коэффициентами. Разработанные методы решения линейных систем, как и линейных уравнений, относятся в основном к системам с постоянными коэффициентами (см. гл.4), поэтому точное решение системы (2.43), а следовательно, и точное решение задачи Коши (2.40) для исходного уравнения Риккати с помощью приведенного алгоритма могут быть получены наверняка лишь в случае, когда $\alpha(t), b(t), c(t)$ - постоянные функции. В этом случае уравнение Риккати является уравнением с разделяющимися переменными и может быть решено непосредственным интегрированием. Однако это замечание не снижает практической важности описанного метода. Действительно, приведенный алгоритм применим как к уравнениям с постоянными коэффициентами, так и к уравнениям с переменными коэффициентами. В последнем случае практическое решение задачи Коши оказывается возможным лишь с применением какого-либо численного метода (см. разд.9,10). При этом решение исходной нелинейной задачи обычно удобнее заменить решением системы (2.43), поскольку это предпочтительнее с точки зрения вычислительных трудностей. Кроме того, уравнения Риккати, возникающие в приложениях, в частности в теории линейных регуляторов, оказываются уравнениями не относительно скалярной функции $x(t)$, а относительно матричной функции $X(t)$. В таком случае непосредственное интегрирование уравнения (2.39), даже если его коэффициенты постоянны, стано-

вится весьма проблематичным и практически невозможным при возрастании размерности описываемой им системы. Метод вспомогательных переменных в этом случае позволяет избежать множества проблем и реализовать эффективную процедуру решения матричного уравнения Риккати [6]. Наконец, применение метода вспомогательных переменных часто позволяет провести анализ устойчивости уравнения Риккати, не решая его, посредством исследования системы (2.43).

2. Система (2.43) может быть сведена к одному линейному уравнению второго порядка, если коэффициент уравнения Риккати $a(t) = a = \text{const}$. Для этого необходимо продифференцировать второе уравнение системы и заменить производную u' , используя первое уравнение:

$$\begin{cases} v'' = -au' - a'u - bv' - b'v, \\ u' = cv, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} v'' = -acv - bv' - b'v, \\ u' = cv, \end{cases} \quad \text{так как } a' = 0.$$

Первое уравнение этой системы:

$$v'' = -bv' - (ac + b')v \quad (2.44)$$

является линейным уравнением второго порядка относительно неизвестной функции $v(t)$. Уравнение (2.44) равносильно системе (2.43) и его решение может быть положено в основу приведенного выше алгоритма решения задачи Коши для уравнения Риккати.

Пример 2.40. Свести задачу Коши для модели рыболовства (см. пример 2.38) к задаче для системы линейных уравнений.

Решение. В данном случае $a(t) = -1$, $b(t) = 1$, $c(t) = -\alpha$, поэтому система (2.43) имеет вид

$$\begin{cases} u' = -\alpha v, \\ v' = u - v, \end{cases}$$

с начальными условиями $u(t_0) = x_0$, $v(t_0) = 1$.

Пример 2.41. Свести задачу Коши для уравнения Риккати из примера 2.39 к задаче для системы линейных уравнений.

Решение. В данном случае $a(t) = -b^2$, $b(t) = -2a$, $c(t) = c^2$, поэтому система (2.43) имеет вид

$$\begin{cases} u' = c^2 v, \\ v' = b^2 u + 2av, \end{cases}$$

с начальными условиями $u(t_0) = 0$, $v(t_0) = 1$.

Методы решения систем, полученных в последних двух примерах, рассматриваются в гл.4.

2.6. Уравнения, не разрешенные относительно производной

2.6.1. Постановка задачи

В разд. 2.1-2.5 рассматривались уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Такие уравнения всегда могут быть записаны в виде $x' = f(t, x)$. В данном разделе рассматриваются некоторые методы решения *уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной*. В общем случае такие уравнения записываются в виде

$$F(t, x, x') = 0. \quad (2.45)$$

В некоторых случаях уравнение (2.45) удается разрешить относительно x' и получить одно или несколько уравнений: $x' = f_i(t, x)$, $i = 1, 2, \dots$

Решая эти, уже разрешенные относительно производной, уравнения, можно найти решение исходного уравнения.

Пример 2.42. Решить задачу Коши:

$$а) x'^2 - 1 = 0, \quad x(0) = 1; \quad б) x'^2 - t^2 = 0, \quad x(1) = \frac{1}{2}.$$

Решение. Оба уравнения можно рассматривать как квадратные относительно x' . Находя выражения для $x'(t)$, получаем, что каждое уравнение распадается на два простейших уравнения с разделяющимися переменными.

а) Из $x'^2 = 1$ имеем $x' = f_1(t, x)$, $x' = f_2(t, x)$, где $f_1(t, x) = 1$, $f_2(t, x) = -1$, то есть $x' = 1$ и $x' = -1$. Общее решение заданного уравнения получается в виде двух семейств интегральных кривых: $x = t + C$ и $x = -t + C$. Из начальных условий находим значения постоянной C для каждого семейства. Очевидно, что и в том, и в другом случае $C = 1$. Итак, решение рассматриваемой задачи Коши составляют две функции: $x = t + 1$ и $x = -t + 1$. На плоскости эти функции определяют прямые, проходящие через точку $(0, 1)$. Заметим, что хотя обе прямые проходят через точку $(0, 1)$, но принадлежат разным семействам интегральных кривых: одна является решением задачи Коши для уравнения $x' = f_1(t, x)$, другая - для уравнения $x' = f_2(t, x)$.

б) Из $x'^2 = t^2$ имеем $x' = f_1(t, x)$, $x' = f_2(t, x)$, где $f_1(t, x) = t$, $f_2(t, x) = -t$, то есть $x' = t$ и $x' = -t$. Таким образом, общее решение заданного уравнения, как и выше, получается в виде двух семейств интегральных кривых: $x = \frac{1}{2}t^2 + C$ и $x = -\frac{1}{2}t^2 + C$. Из начальных условий находим значения постоянной C для каждого семейства. В первом случае $C = 0$, во втором случае $C = 1$. Итак, получаем две параболы $x(t) = \frac{1}{2}t^2$ и $x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 1$, которые проходят через точку $(1, \frac{1}{2})$, но принадлежат разным семействам интегральных кривых рассматриваемого уравнения.

Пример 2.43. Решить уравнение:

$$x'^2 = 4x^3(1 - x).$$

Решение. Из условия получаем $x' = \pm 2x\sqrt{x(1-x)}$, то есть имеем два уравнения с разделяющимися переменными. При $x \neq 0$, $x \neq 1$, $0 < x < 1$ разделяем переменные и интегрируем: $t = \pm \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{x-x^2}} - C$.

Выполнив в интеграле замену $u = \frac{1}{x}$, $dx = -\frac{du}{u^2}$, получим

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-x^2}} = - \int \frac{du}{\sqrt{u-1}} = -2\sqrt{u-1} = -2\sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

Решение уравнения записываем в виде $t + C = \pm \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ или $x(t+C)^2 + x = 1$. Это общее решение рассматриваемого уравнения. Кроме того, в процессе преобразований были потеряны решения $x=0$ и $x=1$, не вошедшие в полученную совокупность и являющиеся особыми решениями.

Пример 2.44. Решить уравнение:

$$x'^2 + tx = x^2 + tx'.$$

Решение. Рассматривая уравнение $x'^2 - tx' + x(t-x) = 0$, как квадратное относительно x' , получаем $x' = f_1(t, x)$, $x' = f_2(t, x)$, где $f_1(t, x) = t - x$, $f_2(t, x) = x$, то есть $x' = t - x$ и $x' = x$.

Первое уравнение заменой $t - x = u$, $u = u(t)$, приводим к уравнению с разделяющимися переменными $1 - u' = u$. Далее, разделяя переменные и интегрируя, находим $\ln|u-1| = -t - \ln C_1$, $\ln C_1(u-1) = -t$, $u-1 = C e^{-t}$, где $C = \frac{1}{C_1}$. Потерянное при разделении переменных решение $u=1$ входит в полученную совокупность при $C=0$. Подставляя $u = t - x$, получаем общее решение уравнения $x' = t - x$ в виде $x(t) = C e^{-t} + t - 1$.

Общее решение исходного уравнения получаем, добавляя к найденной совокупности решение уравнения $x' = x$, то есть $x(t) = C e^t$.

Заметим, однако, что приведенные примеры являются простейшими и далеко не всегда уравнение (2.45) легко разрешается относительно x' . Кроме того, даже в том случае, когда разрешить заданное уравнение относительно x' удастся, полученные после этого новые уравнения не обязательно легко интегрируются. Поэтому на практике для решения уравнения (2.45) используются другие методы. В следующих разделах излагаются некоторые подходы к решению уравнения типа (2.45).

2.6.2. Уравнения первого порядка n -й степени

Уравнение первого порядка, записанное в виде

$$(x')^n + a_{n-1}(t, x)(x')^{n-1} + \dots + a_0(t, x) = 0,$$

называется *уравнением первого порядка n -й степени*. Левая часть уравнения представляет собой многочлен степени n относительно производной $x'(t)$, коэффициентами многочлена являются функции $a_k = a_k(t, x)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Введя обозначение $x' = z$, получим алгебраическое уравнение $P_n(z) = 0$, которое решается алгебраическими методами: разложением многочлена на множители, подбором корней, использованием формул для корней квадратного уравнения. Для каждой полученной функции $z_k = f_k(t, x)$ далее интегрируется уравнение $x' = f_k(t, x)$, разрешенное относительно производной. Заметим, что наряду с трудностями решения дифференциального уравнения $x' = f(t, x)$ здесь добавляются трудности решения алгебраического уравнения $P_n(z) = 0$.

Пример 2.45. Решить уравнение:

$$x'^3 + x^2 = xx'(x' + 1).$$

Решение. Перенесем все слагаемые в левую часть, раскроем скобки и сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$(x'^3 - xx'^2) + (x^2 - xx') = x'^2(x' - x) + x(x - x') = (x'^2 - x)(x' - x).$$

В результате получаем, что данное уравнение распадается на два: $x' = x$ и $x'^2 = x$. Первое из полученных уравнений является уравнением с разделяющимися переменными. Интегрируя его, находим общее решение $x = Ce^t$.

Второе уравнение не разрешено относительно производной и является простейшим уравнением рассматриваемого в данном разделе типа (см. пример 2.43). Рассматривая его как квадратное относительно x' , получаем $x' = \pm \sqrt{x}$. Каждое из двух полученных уравнений является уравнением с разделяющимися переменными. Находим их решения:

$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \pm 1$, $2\sqrt{x} = \pm t + C_1$, $2\sqrt{x} = \pm(t + C)$. Освобождаясь от радикала, получаем $4x = (t + C)^2$. Итак, общее решение рассматриваемого уравнения представляется двумя совокупностями: $x(t) = Ce^t$, $4x(t) = (t + C)^2$.

Пример 2.46. Решить уравнение:

$$x(x - 2tx')^2 = 2x'.$$

Решение. Раскрывая скобки, записываем квадратное уравнение относительно x' : $4t^2 xx'^2 - 2(2tx^2 + 1)x' + x^3 = 0$, из которого получаем

$$x' = \frac{2tx^2 + 1 \pm \sqrt{4tx^2 + 1}}{4t^2 x} \text{ или } 4t^2 xx' = 2tx^2 + 1 \pm \sqrt{4tx^2 + 1}.$$

Получены два уравнения, разрешенные относительно производной, каждое из которых не относится ни к одному из рассмотренных в разд. 2.1-2.5 типов. Упростим эти уравнения, введя новую функцию $\chi(t) = 4tx^2 + 1$. По-

сколько $z' = 4x^2 + 8txx'$, то $4t^2xx' = \frac{z' - 4x^2}{2}t = \frac{z'}{2}t - 2x^2t$, а из равенства

$z = 4tx^2 + 1$ имеем $2tx^2 = \frac{z-1}{2}$. Поэтому уравнения можно записать в виде

$\frac{z'}{2}t - \frac{z-1}{2} = \frac{z-1}{2} + 1 \pm \sqrt{z}$, то есть $\frac{z'}{2}t = z \pm \sqrt{z}$. Таким образом, получены два уравнения с разделяющимися переменными. Разделя переменные, записываем $2 \frac{dt}{t} = \frac{dz}{z \pm \sqrt{z}}$, $z \neq 1$, $z \neq 0$. Для вычисления интеграла от выражения, стоящего в правой части полученного уравнения с разделенными переменными, сделаем замену, обозначив $z = u^2$:

$$\int \frac{dz}{z \pm \sqrt{z}} = \int \frac{2u du}{u^2 \pm u} = 2 \int \frac{du}{u \pm 1} = 2 \ln |u \pm 1| = 2 \ln |\sqrt{z} \pm 1|.$$

Общее решение уравнения записывается в виде $\ln Ct = \ln |\sqrt{z} \pm 1|$, где $z = 4tx^2 + 1$, поэтому $Ct = |\sqrt{4tx^2 + 1} \pm 1|$. Полученное выражение можно упростить, освободившись от радикала:

$$(Ct + 1)^2 = 4tx^2 + 1 \quad \text{или} \quad C^2 t^2 + 2Ct + 1 = 4tx^2 + 1.$$

Окончательно получаем общее решение рассматриваемого уравнения в виде $4x^2 = C^2 t + 2C$.

В результате преобразований было потеряно решение $x = 0$, которое входит в полученную совокупность при $C = 0$. Другое решение $4tx^2 + 1 = 0$, которое получается при $z = 0$, не входит в полученную совокупность, поэтому является особым решением.

Пример 2.47. Решить уравнение:

$$2tx' + x(x - tx')^2 = x.$$

Решение. Раскрывая скобки, записываем квадратное уравнение относительно x' : $xt^2x'^2 - 2t(x^2 - 1)x' + x(x^2 - 1) = 0$. При $x \neq 0$ вычисляем дискриминант: $\frac{D}{4} = t^2(x^2 - 1)^2 - x^2t^2(x^2 - 1) = t^2(1 - x^2)$ и записываем решение квадратного уравнения:

$$x' = \frac{t(x^2 - 1) \pm t\sqrt{1 - x^2}}{xt^2} \quad \text{или} \quad x' = \frac{x^2 - 1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{xt}.$$

Таким образом, получены два уравнения с разделяющимися переменными. При $x \neq \pm 1$ разделяем переменные: $\frac{dt}{t} = \frac{x dx}{x^2 - 1 \pm \sqrt{1 - x^2}}$.

Для интегрирования выражения, стоящего в правой части, воспользуемся заменой $1 - x^2 = u^2$, $u du = -x dx$:

$$\int \frac{x dx}{x^2 - 1 \pm \sqrt{1 - x^2}} = - \int \frac{u du}{-u^2 \pm u} = \int \frac{du}{u \pm 1} = \ln |u \pm 1| = \ln |\sqrt{1 - x^2} \pm 1|.$$

Итак, общее решение рассматриваемого уравнения получаем в виде

$$\ln t + \ln C = \ln |\sqrt{1 - x^2} \pm 1| \text{ или } \ln Ct = \ln |1 \pm \sqrt{1 - x^2}|,$$

$$Ct = 1 \pm \sqrt{1 - x^2}, \quad Ct - 1 = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Окончательный ответ записываем, возводя в квадрат полученное выражение: $(Ct - 1)^2 = 1 - x^2$.

При решении квадратного уравнения и разделении переменных могли быть потеряны решения $x=0$ и $x=\pm 1$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что эти функции действительно являются решениями, причем $x=0$ входит в полученную совокупность при $C=0$ и поэтому является частным решением, $x=\pm 1$ в полученную совокупность не входят и поэтому являются особыми решениями.

2.6.3. Неполные уравнения

Уравнения $F(x') = 0$, не содержащие явно аргумента и искомой функции

Рассмотрим уравнение вида $F(x') = 0$, предполагая, что оно имеет хотя бы одно решение. Это решение, в силу того, что в записи уравнения явно отсутствует аргумент t и функция $x(t)$, может быть записано в виде $x' = k$, $k = \text{const}$. Из этого равенства следует, что совокупность $x(t) = kt + C$ является общим решением уравнения $F(x') = 0$ при условии, что k является решением уравнения $F(k) = 0$. Решать уравнение $F(k) = 0$, которое получается из уравнения $F(x') = 0$ заменой $x' = k$, нет необходимости. Значение k можно получить из равенства $x = kt + C$, то есть $k = \frac{x - C}{t}$. Тогда равенство $F\left(\frac{x - C}{t}\right) = 0$,

равносильное равенству $F(x') = 0$, определяет общее решение дифференциального уравнения. Это общее решение имеет вид $\Phi(t, x, C) = 0$, то есть записано в неявной форме, а значит, является общим интегралом уравнения. Если из равенства $\Phi(t, x, C) = 0$ удастся явно выразить x , то есть привести его к виду $x = x(t, C)$, то будет получено общее решение в явном виде.

Пример 2.48. Решить уравнение:

$$x'^2 + x' - 2 = 0.$$

Решение. Согласно полученному выше результату записываем решение уравнения в виде

$$\left(\frac{x - C}{t}\right)^2 + \frac{x - C}{t} - 2 = 0 \text{ или } (x - C)^2 + t(x - C) - 2t^2 = 0.$$

В данном случае нетрудно получить явную форму записи для $x(t)$, решив квадратное уравнение $x^2 + x(t - 2C) + C^2 - Ct - 2t^2 = 0$. Дискриминант данного уравнения $D = (t - 2C)^2 - 4(C^2 - Ct - 2t^2) = 9t^2$, поэтому

$$x = \frac{-(t - 2C) + 3t}{2} = t + C \quad \text{и} \quad x = \frac{-(t - 2C) - 3t}{2} = C - 2t.$$

Заметим, что это простое уравнение можно решать методом, изложенным в разд. 2.6.2, то есть решить квадратное уравнение относительно x' и из $x' = -2$ и $x' = 1$ получить $x(t) = -2t + C$, $x(t) = C + t$.

Пример 2.49. Решить уравнение:

$$x'^4 - 2x'^3 - x' + 5 = 0.$$

Решение. В отличие от предыдущего примера метод, изложенный в разд. 2.6.2, в данном случае неприменим. Поскольку заданное уравнение имеет вид $F(x') = 0$, для его решения можно использовать прием, рассмотренный в данном разделе. Запишем общий интеграл уравнения:

$$F\left(\frac{x - C}{t}\right) = 0, \text{ то есть } \left(\frac{x - C}{t}\right)^4 - 2\left(\frac{x - C}{t}\right)^3 - \left(\frac{x - C}{t}\right) + 5 = 0 \text{ или} \\ (x - C)^4 - 2(x - C)^3 t - (x - C)t^3 + 5t^4 = 0.$$

Таким образом, решение получено в виде $\Phi(x, t, C) = 0$. Явного выражения для $x(t)$ здесь получить не удастся, но исследовать решение и построить интегральные кривые при любом C можно, используя производные $x'(t)$ и $x''(t)$, которые определяются из полученного выражения по правилу дифференцирования функций, заданных неявно.

Уравнения $F(t, x') = 0$, не содержащие явно искомой функции

Решения такого типа уравнений отыскиваются в параметрической форме, то есть определяются такие функции $x = \psi(p)$ и $t = f(p)$, что выполняется равенство $F(f(p), \psi'(p)) = 0$.

Рассмотрим вначале случай, когда уравнение можно разрешить относительно аргумента, то есть уравнения вида

$$t = f(x'). \quad (2.46)$$

Введем параметр $x' = p$ и получим $t = f(p)$, причем функция $f(p)$ известна. Далее требуется найти функцию $x = \psi(p)$, которая связана с параметром p равенством $dx = p dt$. Находя из равенства $t = f(p)$ выражение для дифференциала $dt = f'(p) dp$ и подставляя его в уравнение $dx = p dt$, получаем $dx = p f'(p) dp$. Интегрируя последнее выражение, получаем $x = \psi(p) = \int p f'(p) dp + C$. Окончательно общее решение уравнения (2.46) записывается в параметрической форме:

$$\begin{cases} t = f(p), \\ x = \int p f'(p) dp + C. \end{cases}$$

Пример 2.50. Решить уравнение:

$$3x'^3 - tx' + 1 = 0.$$

Решение. Введя параметр $p = x'$, получим $t = 3p^2 + 1/p$, $p \neq 0$. Далее найдем $dt = (6p - \frac{1}{p^2}) dp$ и $dx = p dt = (6p^2 - \frac{1}{p}) dp$. Интегрируя это равенство, будем иметь $x = 2p^3 - \ln p + C$. Таким образом, общее решение заданного уравнения получено в параметрической форме: $t = 3p^2 + 1/p$, $x = 2p^3 - \ln p + C$.

В общем случае для решения уравнения $F(t, x') = 0$ также вводится параметр так, что уравнение распадается на два: $t = f(p)$ и $x'(t) = \varphi(p)$. Функции $f(p)$ и $\varphi(p)$ подбираются так, чтобы выполнялось равенство $F(f(p), \varphi(p)) = 0$. Учитывая, что переменные t и x связаны равенством $dx = \varphi(p) dt$, то есть $dx = \varphi(p) f'(p) dp$, после интегрирования находим $x(p) = \int \varphi(p) f'(p) dp + C$ и решение уравнения получаем в параметрической форме.

Пример 2.51. Решить уравнение:

$$t^3 + x'^3 - 3tx' = 0.$$

Решение. Для выбора функции $\varphi(p)$ обозначим $x' = tp$. Тогда $t^3 + t^3 p^3 - 3t^2 p = 0$. При $t = 0$ получаем $x' = 0$ и, следовательно, $x = C$. При $t \neq 0$ из равенства $t + tp^3 - 3p = 0$ находим $t = f(p)$:

$$t = \frac{3p}{1+p^3} \quad \text{и} \quad x' = \frac{3p^2}{1+p^3}.$$

Тем самым получены функции $t = f(p)$ и $x' = \varphi(p)$, такие что $F(f, \varphi) = 0$. Функцию $x(p)$ определим из равенства $dx = x' dt$, где $x' = \frac{3p^2}{1+p^3}$, и $t = f(p) = \frac{3p}{1+p^3}$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} dx &= \frac{3p^2}{1+p^3} dt = \frac{3p^2}{1+p^3} f'(p) dp = \frac{3p^2}{1+p^3} \left(\frac{3p}{1+p^3} \right)' dp = \\ &= \frac{9p^2}{1+p^3} \frac{1+p^3 - 3p^3}{(1+p^3)^2} dp = \frac{9p^2(1-2p^3)}{(1+p^3)^3} dp. \end{aligned}$$

Проинтегрировав последнее выражение, найдем функцию $x(p) = \frac{3(1+4p^3)}{2(1+p^3)^2} + C$, которая вместе с полученной выше функцией $t(p) = \frac{3p}{1+p^3}$ определяет общее решение уравнения в параметрической форме.

Уравнения $F(x, x') = 0$, не содержащие явно аргумента

Решения уравнений $F(x, x') = 0$, как и рассмотренных выше уравнений $F(t, x') = 0$, можно найти в параметрической форме.

Рассмотрим вначале случай, когда уравнение можно разрешить относительно искомой функции, то есть уравнение вида

$$x = f(x'). \quad (2.47)$$

Введем параметр $p = x'$ и запишем $x = f(p)$, причем функция $f(p)$ известна. Функцию $t = \varphi(p)$ найдем, используя равенство $dt = \frac{dx}{p}$, то есть из выражения $dt = \frac{f'(p)}{p} dp$. Вместе с $x = f(p)$ функция $t = \int \frac{f'(p)}{p} dp + C$ определяет общее решение уравнения $x = f(x')$, записанное в параметрической форме.

Пример 2.52. Решить уравнение:

$$4x'^3 = x' + x.$$

Решение. Вводя параметр $p = x'$, получаем $x = 4p^3 - p$. Отсюда $dx = (12p^2 - 1) dp$. Из равенства $dt = \frac{dx}{p}$ имеем $dt = (12p - \frac{1}{p}) dp$ и находим

$$t = \int (12p - \frac{1}{p}) dp = 6p^2 - \ln|p| + C.$$

Таким образом, получено решение заданного уравнения в параметрическом виде: $x = 4p^3 - p$, $t = 6p^2 - \ln|p| + C$.

Пример 2.53. Решить уравнение:

$$x'^2 - x'^3 = x^2.$$

Решение. Вводя параметр $p = x'$, получаем $x^2 = p^2 - p^3$ или $x = \pm \sqrt{p^2 - p^3}$. Записываем дифференциал $dx = \pm \frac{2p - 3p^2}{2\sqrt{p^2 - p^3}} dp$ и из равенства $dx = p dt$ находим $p dt = \pm \frac{2 - 3p}{2\sqrt{1 - p}} dp$. Разделяем переменные и интегрируем полученное равенство:

$$t = \pm \frac{1}{2} \int \frac{2-3p}{p\sqrt{1-p}} dp = \pm \int \frac{dp}{p\sqrt{1-p}} - \left(\pm \frac{3}{2} \int \frac{dp}{\sqrt{1-p}} \right) = \pm 3\sqrt{1-p} \pm \int \frac{dp}{p\sqrt{1-p}}.$$

Последний интеграл заменой $1-p=u^2$ приводим к выражению $-2 \int \frac{du}{1-u^2} = -2 \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| = \ln \left| \frac{1-u}{1+u} \right|$. Для функции $t(p)$ получаем выражение $t = C \pm \left(3\sqrt{1-p} + \ln \frac{1-\sqrt{1-p}}{1+\sqrt{1-p}} \right)$, которое вместе с $x = \pm \sqrt{p^2 - p^3}$ определяет общее решение рассматриваемого уравнения, записанное в параметрической форме.

При разделении переменных ($p \neq 0$, $p \neq 1$) было потеряно решение $x=0$, которое не входит в общую совокупность и, следовательно, является особым решением.

2.6.4. Полные уравнения

Уравнения $t=f(x, x')$, разрешенные относительно аргумента

Рассмотрим уравнение $F(t, x, x')=0$, предполагая, что его можно разрешить относительно независимой переменной t , то есть привести к виду $t=f(x, x')$.

Решение, как и выше, отыскивается в параметрической форме. Введем параметр $p=x'$ и запишем $t=f(x, p)$, причем $f(x, p)$ - известная функция двух аргументов. Запишем дифференциал этой функции по правилу дифференцирования функций двух переменных: $dt=f'_x dx + f'_p dp$. Учитывая равенство $dt=\frac{dx}{p}$, получаем $(f'_x - \frac{1}{p})dx + f'_p dp = 0$. Это равенство представляет собой уравнение вида (2.2). Решая его одним из изученных ранее методов, найдем функцию $x=\varphi(p, C)$, которая вместе с $t=f(x, p)=f(\varphi(p, C), p)$ определяет общее решение уравнения $t=f(x, x')$, записанное в параметрической форме.

Пример 2.54. Решить уравнение:

$$x'^3 + x^2 = txx'.$$

Решение. Из трех переменных этого уравнения вида $F(t, x, x')=0$ оно наиболее просто разрешается при $x \neq 0$ относительно аргумента t :

$t = \frac{x'^2}{x} + \frac{x}{x'}$, то есть является уравнением вида $t=f(x, x')$. Вводим параметр

$p=x'$ и записываем $t = \frac{p^2}{x} + \frac{x}{p}$ ($x \neq 0$, $p \neq 0$). Находим дифференциал этой

функции $dt = \frac{2px dp - p^2 dx}{x^2} + \frac{p dx - x dp}{p^2}$ и, учитывая равенство $dt = \frac{dx}{p}$, получаем

$$\frac{dx}{p} = \frac{2px dp - p^2 dx}{x^2} + \frac{p dx - x dp}{p^2} = \frac{2p}{x} dp - \frac{p^2}{x^2} dx + \frac{1}{p} dx - \frac{x}{p^2} dp.$$

Отсюда $\left(\frac{2p}{x} - \frac{x}{p^2}\right) dp = \frac{p^2}{x^2} dx$ или $\frac{dx}{dp} = \frac{2p^3 x - x^3}{p^4}$. Последнее уравнение яв-

ляется уравнением Бернулли с $m = 3$, так как может быть переписано в форме $x' - \frac{2}{p} x = -\frac{x^3}{p^4}$.

Найдем решение этого уравнения методом Бернулли, то есть представим искомую функцию $x(p)$ в виде $x = u(p) v(p)$. Тогда $u' v + u v' - \frac{2}{p} uv + \frac{u^3 v^3}{p^4} = 0$ или $u' v + \frac{u^3 v^3}{p^4} + u(v' - \frac{2}{p} v) = 0$. Функцию $v(p)$ будем искать как решение уравнения $v' - \frac{2}{p} v = 0$, а затем из уравнения $u' v + \frac{u^3 v^3}{p^4} = 0$ найдем $u(p)$.

Решение первого уравнения $v = p^2$ подставляем во второе и получаем $u' + u^3 = 0$. Разделяем в последнем уравнении переменные и интегрируем: $\int \frac{du}{u^3} = - \int \frac{1}{p^2} dp$, то есть $\frac{1}{u^2} = 2p + C$. Из равенств $u^2 = \frac{1}{2p + C}$ и $v^2 = p^4$ находим $x^2 = u^2 v^2 = \frac{p^4}{2p + C}$. Общее решение рассматриваемого уравнения можно записать в виде $x^2(2p + C) = p^4$, $px^2 = p^3 + x^2$ или, выразив $x(p)$ из первого равенства и подставив во второе, в виде $x^2(2p + C) = p^4$, $t^2(2p + C) = (3p + C)^2$.

Пример 2.55. Решить уравнение:

$$x'^3 x^2 + 2tx' = x.$$

Решение. Как и в предыдущем примере, данное уравнение в наиболее удобной форме разрешается при $x \neq 0$ относительно переменной t : $t = \frac{1}{2x'}(x - x^2 x'^3)$.

Вводя параметр $p = x'$, записываем $t = \frac{1}{2}(\frac{x}{p} - x^2 p^2)$. Находим дифференциал этой функции и, подставляя его в равенство $dt = \frac{dx}{p}$, получаем

$$\frac{dx}{p} = \frac{1}{2} \left(\frac{p dx - x dp}{p^2} - 2p^2 x dx - 2px^2 dp \right),$$

или $p dx + 2xp^4 dx + 2p^3 x^2 dp + x dp = 0$, то есть

$$p(1+2xp^3)dx + x(1+2p^3x)dp = 0 \quad \text{или} \quad (1+2xp^3)(pdx + xdp) = 0.$$

Таким образом, уравнение распадается на два:

$$1+2xp^3=0 \quad \text{и} \quad pdx + xdp = 0.$$

Разделяя во втором уравнении переменные $\left(\frac{dx}{x} = -\frac{dp}{p}\right)$ и интегрируя, получаем $px = C$. Подставляя равенство $x = \frac{C}{p}$ в выражение для $t = t(x, p)$, находим функцию $t(x, p): t = \frac{1}{2}\left(\frac{C}{p^2} - C^2\right)$, которая вместе с $x = \frac{C}{p}$ определяет общее решение уравнения в параметрической форме. Исключая параметр, это решение можно записать в виде $x^2 = C(2t + C^2)$.

Из равенств $1+2xp^3=0$ и $t = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{p} - x^2p^2\right)$ получаем еще одно решение уравнения $t = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2p^4} - \frac{p^2}{4p^6}\right) = -\frac{3}{8p^4}$, то есть решение вида $t = -\frac{3}{8p^4}$, $x = -\frac{1}{2p^3}$. Это особое решение, записанное в параметрической форме. Исключим параметр, для чего запишем первое равенство в виде $\frac{1}{p^4} = -\frac{8t}{3}$ и возведем обе его части в куб: $\frac{1}{p^{12}} = -\left(\frac{8t}{3}\right)^3$, а второе равенство - в виде $\frac{1}{p^3} = -2x$ и возведем обе его части в четвертую степень: $\frac{1}{p^{12}} = (2x)^4$. Отсюда получаем $(2x)^4 = -\frac{8^3 t^3}{27}$ или $27x^4 + 32t^3 = 0$.

Уравнения $x = f(t, x')$, разрешенные относительно искомой функции

Рассмотрим полное уравнение $F(t, x, x') = 0$, предполагая, что его можно разрешить относительно искомой функции, то есть записать в виде $x = f(t, x')$. Решение в данном случае, как и выше, отыскивается в параметрической форме.

Введем параметр $p = x'$ и запишем $x = f(t, p)$, причем $f(t, p)$ - известная функция двух переменных. Записываем ее дифференциал $dx = f'_t dt + f'_p dp$. Учитывая равенство $dx = p dt$, получаем $f'_p dp + (f'_t - p) dt = 0$. Это равенство представляет собой уравнение вида (2.2). Если решение этого уравнения будет найдено в виде $p = p(t, C)$, то подставляя его в равенство $x = f(t, p)$, получаем $x = f(t, p(t, C))$ - общее решение уравнения $x = f(t, x')$. Если же при решении уравнения получится функция $t = \varphi(C, p)$, то она вместе с равенством $x = f(\varphi(C, p), p)$ определит общее решение уравнения $x = f(t, x')$ в параметрической форме.

Пример 2.56. Решить уравнение

$$x'^2 - 2tx' = t^2 - 4x.$$

Решение. В наиболее удобной форме это уравнение разрешается относительно переменной x , а именно $4x = t^2 + 2tx' - x'^2$. Введем параметр $p = x'$ и запишем $4x = t^2 + 2tp - p^2$. Находим дифференциал:

$$dx = \frac{1}{4} (2t dt + 2t dp + 2p dt - 2p dp),$$

и, учитывая равенство $dx = p dt$, получаем

$$2p dt = t dt + p dt + (t - p) dp \quad \text{или} \quad (t - p) dp + (t - p) dt = 0.$$

Это уравнение распадается на два: $dt + dp = 0$ и $t = p$. Решая первое уравнение, находим $t = C - p$. Подставляя полученное решение в выражение для $x(t, p)$, получаем функцию $4x = (C - p)^2 + 2p(C - p) - p^2$, которая вместе с функцией $t = C - p$ определяет общее решение заданного уравнения, записанное в параметрической форме. В данном случае нетрудно исключить параметр и получить решение в явной форме: $4x = t^2 + 2t(C - t) - (C - t)^2$, то есть $4x = C^2 - 2(C - t)^2$.

Равенство $t = p$ вместе с функцией $4x = t^2 + 2tp - p^2$, которая принимает вид $x = \frac{1}{2} p^2$, определяет еще одно решение - особое решение, записанное в параметрической форме. Исключая параметр, запишем это решение в явной форме: $x = t^2/2$.

Уравнения Лагранжа и Клеро

Среди уравнений вида $x = f(t, x')$ выделим уравнения, которые можно записать в виде

$$x = t\varphi(x') + \psi(x'), \quad (2.48)$$

где $\varphi(x')$ и $\psi(x')$ - заданные функции переменной x' . Уравнение (2.48) называется *уравнением Лагранжа*.

Применение изложенного выше метода решения уравнений $x = f(t, x')$ приводит уравнение Лагранжа к уравнению, линейному относительно переменной t и ее производной $\frac{dt}{dp}$.

Действительно, записывая дифференциал функции $x = t\varphi(p) + \psi(p)$, получаем $p dt = t\varphi'(p) dp + \varphi(p) dt + \psi'(p) dp$ или $(p - \varphi(p)) dt - (\varphi'(p)t + \psi'(p)) dp = 0$. Это уравнение является линейным и может быть записано в виде

$$\frac{dt}{dp} + t \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Решив это уравнение, найдем функцию $t = f(p, C)$, которая вместе с функцией $x = t\varphi(p) + \psi(p)$ дает общее решение уравнения Лагранжа:

$$p \, dt = (2p - p^2) \, dt + (2 - 2p) \, t \, dp + (3 - 3p^2) \, dp \text{ или} \\ p(1 - p) \, dt + 2t(1 - p) \, dp + 3(1 - p^2) \, dp = 0.$$

Последнее уравнение распадается на два: $p = 1$ и $p \frac{dt}{dp} + 2t + 3(1 + p) = 0$. При $p = 1$ из равенства $x = t(2p - p^2) + 3p - p^3$ получаем решение уравнения $x = t + 2$.

Второе уравнение при $p \neq 0$ является линейным: $t' + \frac{2}{p}t = -\frac{3(1+p)}{p}$, и его решение определяется по формуле (2.35):

$$t = e^{-\int \frac{2}{p} dp} \left(\int e^{\int \frac{2}{p} dp} \left(-\frac{3 - 3p}{p} \right) dp + C \right) = \frac{1}{p^2} (C - p^3 - \frac{3}{2} p^2) = \frac{C}{p^2} - p - \frac{3}{2}.$$

Подставляя найденное $t(p, C)$ в выражение для $x(t, p)$, находим соответствующую функцию $x(p, C)$:

$$x(p, C) = (2p - p^2) \left(\frac{C}{p^2} - p - \frac{3}{2} \right) + 3p - p^3 = C \left(\frac{2}{p} - 1 \right) - \frac{p^2}{2}.$$

Получено общее решение заданного уравнения в параметрической форме: $t = \frac{C}{p^2} - p - \frac{3}{2}$, $x = C \left(\frac{2}{p} - 1 \right) - \frac{p^2}{2}$. Решения $x = t + 2$ и $x = 0$, соответствующее значению $p = 0$, являются особыми решениями.

Выделим простейший частный случай уравнения Лагранжа, соответствующий $\Phi(x') = x'$, то есть уравнение

$$x = tx' + \psi(x'). \quad (2.49)$$

Это уравнение называется *уравнением Клеро*. Особенностью этого уравнения является то, что его общее решение может быть записано непосредственно. Действительно, решая его как уравнение Лагранжа, получаем $p \, dt = p \, dt + t \, dp + \psi'(p) \, dp$ или $(t + \psi'(p)) \, dp = 0$. Из последнего равенства имеем $dp = 0$ и, следовательно, $p = C$ и $t = -\psi'(p)$. При $p = C$ получаем $x = Ct + \psi(C)$ - общее решение уравнения Клеро. Сравнивая полученный результат и вид уравнения Клеро, замечаем, что общее решение может быть записано путем формальной замены в заданном уравнении x' на C .

Подставляя $t = -\psi'(p)$ в выражение для $x(t, p)$, получаем особое решение уравнения Клеро, записанное в параметрической форме:

$$t = -\psi'(p), \quad x = t p + \psi(p). \quad (2.50)$$

Пример 2.59. Решить уравнение:

$$x'^3 - 3tx' + 3x = 0.$$

$$x = f(p, C) \varphi(p) + \psi(p), \quad t = f(p, C).$$

При разделении переменных могут быть потеряны решения, которые соответствуют значениям p , определяемым равенством $p = \varphi(p)$. Удовлетворяющие этому равенству значения параметра p надо подставить в выражение $x = t \varphi(p) + \psi(p)$ и получить, таким образом, функцию $x(t)$. Если эта функция является решением уравнения, то оно может быть частным, если входит в совокупность, определяющую общее решение, или особым, в противном случае.

Пример 2.57. Решить уравнение:

$$2tx' - x = \sin x'.$$

Решение. Уравнение $x = 2tx' - \sin x'$ является уравнением Лагранжа, здесь $\varphi(x') = 2x'$, $\psi(x') = -\sin x'$. Вводя параметр $p = x'$, получаем $x = 2tp - \sin p$. Записывая дифференциал этой функции и учитывая, что $dx = p dt$, получаем $p dt = 2p dt + 2t dp - \cos p dp$, или при $p \neq 0$

$$\frac{dt}{dp} + \frac{2}{p} t = \frac{\cos p}{p}.$$

Записываем решение этого линейного уравнения по формуле (2.35):

$$\begin{aligned} t &= e^{-\int \frac{2}{p} dp} \left(\int e^{\int \frac{2}{p} dp} \frac{\cos p}{p} dp + C \right) = \frac{1}{p^2} \left(\int p \cos p dp + C \right) = \\ &= \frac{1}{p^2} \left(C + p \sin p - \int \sin p dp \right) = \frac{1}{p^2} (p \sin p + \cos p + C). \end{aligned}$$

Подставляя $t(p, C)$ в выражение $x(t, p) = 2tp - \sin p$, получаем

$$x(p, C) = \sin p + \frac{2}{p} \cos p + \frac{2C}{p},$$

которая вместе с функцией $t(p, C) = \frac{1}{p} \sin p + \frac{1}{p^2} \cos p + \frac{C}{p^2}$ определяет общее решение заданного уравнения, записанное в параметрической форме. При разделении переменных потеряно решение $x = 0$, соответствующее $p = 0$. Это особое решение уравнения.

Пример 2.58. Решить уравнение:

$$x'^3 + tx'^2 - x'(2t + 3) + x = 0.$$

Решение. Записав уравнение в виде $x = t(2x' - x'^2) + 3x' - x'^3$, заметим, что это уравнение Лагранжа, где $\varphi(x') = 2x' - x'^2$, $\psi(x') = 3x' - x'^3$.

Для функции $x = t(2p - p^2) + 3p - p^3$, где $p = x' = \frac{dx}{dt}$, записываем дифференциал

Решение. Разрешая это уравнение относительно искомой функции, получаем уравнение Клеро: $x = tx' - \frac{x'^3}{3}$, где $\psi(x') = -\frac{x'^3}{3}$.

Заменив x' на C , выпишем общее решение заданного уравнения: $x = Ct - \frac{1}{3} C^3$.

Найдем теперь особое решение. Вводя параметр $p = x'$, получаем $x = tp - \frac{p^3}{3}$. Из равенства $\psi(p) = -\frac{p^3}{3}$ находим $\psi'(p) = -p^2$ и $t = -\psi'(p) = p^2$. Подставляя $t = p^2$ в выражение для $x(t, p)$, получаем $x = p^3 - \frac{p^3}{3}$, то есть $x = \frac{2}{3} p^3$. Таким образом, особое решение рассматриваемого уравнения, записанное в параметрической форме, имеет вид $t = p^2$, $x = \frac{2}{3} p^3$. Исключая параметр, представим это решение в неявной форме: $4t^3 = 9x^4$.

Пример 2.60. Решить уравнение:

$$x'^3 - (tx' - x)^3 = 1.$$

Решение. Разрешая уравнение относительно искомой функции, получаем $x = tx' - (x'^3 - 1)^{1/3}$. Это уравнение Клеро с $\psi(x') = -(x'^3 - 1)^{1/3}$. Общее решение уравнения имеет вид $x = Ct - (C^3 - 1)^{1/3}$.

Найдем особое решение. Введя параметр $p = x'$, получим $x = pt - (p^3 - 1)^{1/3}$ и $\psi(p) = -(p^3 - 1)^{1/3}$. Поэтому $\psi'(p) = -\psi'(p) = p^2(p^3 - 1)^{-2/3}$. Подставляя найденную функцию $t(p)$ в выражение для $x(t, p)$, имеем

$$x(p) = \frac{p^3}{(p^3 - 1)^{2/3}} - (p^3 - 1)^{1/3} = \frac{p^3 - (p^3 - 1)}{(p^3 - 1)^{2/3}} = (p^3 - 1)^{-2/3}.$$

Согласно формуле (2.50) особое решение заданного уравнения, записанное в параметрической форме, имеет вид $t = p^2(p^3 - 1)^{-2/3}$, $x = (p^3 - 1)^{-2/3}$. Исключим параметр, для чего перепишем выражение $t = p^2(p^3 - 1)^{-2/3}$ в виде $t^{3/2} = \frac{p^3}{p^3 - 1} = \frac{p^3 - 1 + 1}{p^3 - 1} = 1 + \frac{1}{p^3 - 1}$. Подставляя в это выражение $x^{3/2} = \frac{1}{p^3 - 1}$, получаем окончательно $t^{3/2} - x^{3/2} = 1$ - особое решение уравнения.

Пример 2.61. Решить уравнения:

$$a) tx' - x = \ln x', \quad б) tx' + x = \ln x'.$$

Решение. Первое из уравнений является уравнением Клеро, второе - уравнением Лагранжа.

а) Записываем заданное уравнение в форме (2.49): $x = tx' - \ln x'$. Отсюда $\psi(x') = -\ln x'$. Общее решение имеет вид $x = Ct - \ln C$, $C > 0$. Найдем особое решение. Из равенства $\psi(p) = -\ln p$ получаем $\psi'(p) = -\frac{1}{p}$ и, следовательно, $t = -\psi'(p) = \frac{1}{p}$. Подставляя найденную функцию $t(p)$ в равенство $x = tp - \ln p$, находим $x = 1 - \ln p$, $p > 0$. Исключая параметр ($p^2 = \frac{1}{t}$, $t > 0$), получаем особое решение в явной форме: $x(t) = 1 + \ln t$.

б) Заданное уравнение Лагранжа перепишем в виде $x = -tx' + \ln x'$, то есть $\phi(x') = -x'$, $\psi(x') = \ln x'$. Для функции $x = -tp + \ln p$, $p > 0$, записываем дифференциал dx , учитывая, что $dx = p dt$: $p dt = -p dt - t dp + \frac{1}{p} dp$, или $2p dt = (\frac{1}{p} - t) dp$. Получаем линейное уравнение: $t' + \frac{1}{2p} t = \frac{1}{2p^2}$. Решение этого уравнения записываем по формуле (2.35):

$$\begin{aligned} t &= e^{-\int \frac{dp}{2p}} \left(\int e^{\int \frac{dp}{2p}} \frac{1}{2p^2} dp + C \right) = e^{-\frac{1}{2} \ln p} \left(\int e^{\frac{1}{2} \ln p} \frac{1}{2p^2} dp + C \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} \left(\int \frac{\sqrt{p}}{2p^2} dp + C \right) = \frac{1}{\sqrt{p}} \left(C + \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{\sqrt{p}} \right) \right) = \frac{C}{\sqrt{p}} - \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Подставляя найденное для $t(p, C)$ выражение в равенство $x = -tp + \ln p$, получаем $x = \ln p + 1 - C\sqrt{p}$. Таким образом, общее решение рассматриваемого уравнения, записанное в параметрической форме, имеет вид $t = \frac{C}{\sqrt{p}} - \frac{1}{p}$, $x = \ln p + 1 - C\sqrt{p}$.

Пример 2.62. Решить уравнение:

$$t^2 x'^2 + 2(2 - tx)x' + x^2 = 0.$$

Решение. Данное уравнение можно рассматривать как квадратное относительно любой из переменных t , x , x' . Для первых двух переменных решение имеет более простой вид, чем для третьей, и определяется одним и тем же выражением $tx' = x \pm 2\sqrt{-x'}$. Разрешив последнее уравнение относительно искомой функции, получим два уравнения Клеро: $x = tx' \pm 2\sqrt{-x'}$, $\psi(x') = \pm 2\sqrt{-x'}$. Общие решения этих уравнений имеют вид $x = Ct \pm 2\sqrt{-C}$, $C \leq 0$. Обозначив $C = -C_1^2$, перепишем полученное уравнение в виде $x = -C_1^2 t \pm 2C_1$. Полагая $\pm C_1 = C$, окончательно получаем общие решения в виде $x = C(2 - Ct)$.

Найдем особые решения уравнений. Из равенства $\psi(p) = \pm 2\sqrt{-p}$ имеем $\psi'(p) = \pm \frac{2(-1)}{2\sqrt{-p}} = \pm \frac{1}{\sqrt{-p}}$, поэтому $t = \pm \frac{1}{\sqrt{-p}}$. Подставляя полученное выражение для $t(p)$ в выражение $x(t, p) = tp \pm 2\sqrt{-p}$, находим $x(p)$ и, следовательно,

особое решение рассматриваемого уравнения, записанное в параметрической форме. В данном примере можно сразу исключить параметр, подставляя в выражение для $x(t, p)$ равенство $\pm \frac{1}{\sqrt{-p}} = t$ и $p = -\frac{1}{t^2}$. Получаем $x = -\frac{t}{t^2} + \frac{2}{t}$, то есть $x = \frac{1}{t}$ - особое решение.

Пример 2.63. Решить уравнение:

$$x'^4 = 4x(2x - tx')^2.$$

Решение. Преобразуем уравнение к следующему виду $x'^2 \pm 2\sqrt{x}(2x - tx') = 0$. Далее его можно решать как квадратное относительно переменной x' , а можно предварительно упростить, выполнив рационализирующую подстановку, то есть избавиться от радикала, введя обозначение $x = z^2$, $z = z(t)$. Подстановкой $x = z^2$, $x' = 2zz'$ приведем рассматриваемое уравнение к виду $4z^2 z'^2 \pm 2z(2z^2 - 2tzz') = 0$ или $z'^2 \pm (z - tz') = 0$ и $z = 0$. Из равенства $z = 0$ получаем решение исходного уравнения $x = 0$. Уравнения $z'^2 \pm (z - tz') = 0$ можно записать как уравнения Клеро (2.49) относительно функции $z(t)$, а именно, $z = tz' \pm z'^2$. Общие решения этих уравнений запишем в виде $z = C_1 t \pm C_1^2$, поэтому для исходного уравнения получаем $x = C_1^2 (t \pm C_1)^2$ или $x = C^2 (t + C)^2$.

Найдем также особые решения. Из равенства $z = tp \pm p^2$ имеем $\psi(p) = \pm p^2$, $\psi'(p) = \pm 2p$ и, поскольку $t = -\psi'(p)$, то $t = -2p$ или $t = 2p$. При подстановке $p = -1/2$ в выражение $z = tp + p^2$ и при подстановке $p = 1/2$ в выражение $z = tp - p^2$ получаем $z = -\frac{t^2}{4}$ и $z = \frac{t^2}{4}$, соответственно. Это особые решения вспомогательных уравнений. Для исходного уравнения из равенства $x = z^2$ находим $x = \frac{t^4}{16}$ - искомое особое решение, записанное в явной форме.

2.6.5. Простейшие краевые задачи

Решение некоторых типов уравнений второго порядка в ряде случаев сводится к решению уравнений первого порядка. Такая ситуация возникает, в частности, при использовании метода понижения порядка дифференциального уравнения.

Пример 2.64. Решить уравнение:

$$x'' - x' = 1.$$

Решение. Вводя обозначение $x' = z$, $z = z(t)$, получаем уравнение первого порядка $z' - z = 1$. Это линейное уравнение первого порядка, и его решение имеет вид $z = C_1 e^t - 1$. Возвращаясь к исходным обозначениям, получаем

уравнение относительно функции $x(t)$: $x' = C_1 e^t - 1$. Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, среди коэффициентов которого есть произвольная постоянная C_1 . По отношению к исходному уравнению полученное вспомогательное уравнение называется *первым интегралом*. Интегрируя его, получаем общее решение исходного уравнения

$$x(t) = \int (C_1 e^t - 1) dt = C_1 e^t - t + C_2.$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 , входящие в запись общего решения, могут быть определены при решении задачи Коши с использованием начальных условий вида $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x'_0$ (см. (1.8)).

С другой стороны, условия для определения постоянных могут быть заданы и в ином виде, например, указанием значений, которые принимает искомая функция на концах некоторого промежутка $[a, b]$. Такие условия $x(a) = x_a$, $x(b) = x_b$ называются *краевыми условиями*, а задача нахождения решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего таким условиям - *краевой задачей*.

Пример 2.65. Решить краевую задачу:

$$x'' - x' = 1, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

Решение. В предыдущем примере определено общее решение заданного уравнения $x(t) = C_1 e^t - t + C_2$. Из краевых условий найдем значения C_1 и C_2 . Из условия $x(0) = 0$ имеем $C_1 + C_2 = 0$, а из условия $x(1) = 0$ с учетом того, что

$C_2 = -C_1$, получаем $C_1(e - 1) - 1 = 0$. Отсюда $C_1 = \frac{1}{e - 1}$ и $C_2 = -\frac{1}{e - 1}$ и, следо-

вательно, $x = \frac{e^t - 1}{e - 1} - t$ - решение рассматриваемой краевой задачи.

Необходимость решать краевые задачи возникает при исследовании многих прикладных вопросов. В частности к ним приводят широко распространенные задачи *вариационного исчисления* ([44]).

В простейшей задаче вариационного исчисления требуется среди всех непрерывно дифференцируемых на отрезке $[t_0, T]$ функций, графики которых проходят через две заданные точки $x(t_0) = x_0$ и $x(T) = x_T$, найти такую функцию $x^*(t)$, на которой функционал

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^T F(t, x(t), x'(t)) dt$$

достигает экстремума (минимума или максимума). При этом предполагается, что заданная подынтегральная функция $F(t, x, x')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Известно [44], что функции $x^*(t)$, "подозрительные" на наличие экстремума, являются решениями следующей краевой задачи для *уравнения Эйлера*

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(T) = x_T. \quad (2.51)$$

В (2.51) обозначено $F_x = \frac{\partial F(t, x, x')}{\partial x}$, $F_{x'} = \frac{\partial F(t, x, x')}{\partial x'}$.

Функции, удовлетворяющие (2.51), называются *экстремальными*.
Уравнение Эйлера (2.51) в развернутой форме имеет вид

$$F_x - F_{x't} - F_{x'x} x' - F_{x'x'} x'' = 0 \quad (2.52)$$

и представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение зависит от двух произвольных постоянных C_1 и C_2 , которые могут быть найдены из двух краевых (граничных) условий.

В некоторых частных случаях уравнение Эйлера имеет первый интеграл, то есть задача сводится к решению уравнений первого порядка, рассматриваемых в данном разделе. К этому приводит, например, случай, когда функция $F(t, x, x')$ не зависит явно от переменной x : $F(t, x, x') = F(t, x')$. В этом случае уравнение Эйлера принимает вид $\frac{d}{dt} F_{x'} = 0$ и, следовательно, имеет первый интеграл

$$F_{x'} = C_1. \quad (2.53)$$

Если функция $F(t, x, x')$ не зависит явно от переменной t : $F(t, x, x') = F(x, x')$, то уравнение Эйлера принимает вид

$$F_x - F_{x'x} x' - F_{x'x'} x'' = 0,$$

так как $F_{x't} = 0$. Умножая левую и правую части уравнения на x' , уравнение в этом случае можно привести к виду $\frac{d}{dt} [F - x' F_{x'}] = 0$.

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [F - x' F_{x'}] &= F_x x' + F_{x'x} x'' - x'' F_{x'} - x' F_{x'x} x' - \\ &- x' F_{x'x'} x'' = x' [F_x - F_{x'x} x' - F_{x'x'} x'']. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$F - x' F_{x'} = C_1. \quad (2.54)$$

Уравнения (2.53) и (2.54) являются уравнениями первого порядка, как правило, не разрешенными относительно производной. В приведенных далее примерах для их решения используется метод введения параметра, изложенный в данном разделе.

Пример 2.66. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + x'^2(t)}}{t} dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(1) = 3 + \sqrt{3}$, $x(2) = 3$.

Решение. Подынтегральная функция $F = \frac{\sqrt{1+x'^2}}{t}$ явно не зависит от переменной x и, следовательно, уравнение Эйлера имеет первый интеграл (2.53)

$$F_{x'} = \frac{x'}{t\sqrt{1+x'^2}} = C_1 = \frac{1}{C}.$$

Для нахождения общего решения уравнения Эйлера далее нужно решить уравнение первого порядка $Cx' = t\sqrt{1+x'^2}$, не разрешенное относительно производной. Решение, как и во всех подобных случаях, будем искать в параметрической форме. Если, как обычно, ввести параметр $p = x'$, то решение будет получено в таком виде, что окажется невозможным исключить параметр.

Подберем такое обозначение, чтобы $x(p)$ была рациональной функцией переменной p , например, $x' = \operatorname{tg} p$. Тогда $\sqrt{1+x'^2} = \frac{1}{\cos p}$ и $C \operatorname{tg} p = \frac{t}{\cos p}$, то есть $t = C \sin p$. Выписываем теперь дифференциал: $dt = C \cos p \, dp$. С учетом равенства $dx = \operatorname{tg} p \, dt$ получаем $dx = \operatorname{tg} p \cdot C \cdot \cos p \, dp = C \sin p \, dp$. После интегрирования имеем $x(t) = -C \cos p + C_2$.

Получено общее решение уравнения Эйлера, записанное в параметрической форме: $t = C \sin p$, $x(t) = C_2 - C \cos p$. Возводя в квадрат и складывая полученные равенства, избавляемся от параметра и получаем $t^2 + (x(t) - C_2)^2 = C^2$ - общий интеграл уравнения Эйлера.

Определим постоянные C и C_2 из граничных условий:

$$1 + (3 + \sqrt{3} - C_2)^2 = C^2, \quad 4 + (3 - C_2)^2 = C^2.$$

Отсюда $C_2 = 3$, $C^2 = 4$. В результате получаем экстремаль

$$t^2 + (x^*(t) - 3)^2 = 4,$$

или, учитывая условие $x^*(1) = 3 + \sqrt{3}$, окончательно $x^*(t) = 3 + \sqrt{4-t^2}$, $t \in [1, 2]$.

Пример 2.67. Найти экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int_0^{1/2} [x'^2(t) - x^2(t)] \, dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 1$, $x(1/2) = 0$.

Решение. Заметим, что подынтегральная функция $F = x'^2 - x^2$ явно не зависит от переменной t и, следовательно, уравнение Эйлера имеет первый интеграл (2.54):

$$F - x' F_{x'} = x'^2 - x^2 - x'(2x') = C_1 \quad \text{или} \quad x'^2 + x^2 = C^2, \quad \text{где} \quad C^2 = -C_1.$$

Найдем общее решение этого уравнения. Вводя параметр $p = x'$, получаем $x^2 = C^2 - p^2$ и $x = \sqrt{C^2 - p^2}$. Записываем дифференциал $dx = -\frac{2p}{2\sqrt{C^2 - p^2}} dp$,

и с учетом равенства $dt = \frac{dx}{p}$ получаем $dt = -\frac{dp}{\sqrt{C^2 - p^2}}$. Проинтегрировав обе

части последнего равенства, получаем $t = -\arcsin \frac{p}{C} + C_2$. Отсюда

$\arcsin \frac{p}{C} = C_2 - t$, $\frac{p}{C} = \sin(C_2 - t)$, $p = C \sin(C_2 - t)$. Поэтому общее решение уравнения Эйлера принимает вид

$$x(t) = \sqrt{C^2 - p^2} = \sqrt{C^2 - C^2 \sin^2(C_2 - t)} = C \cos(C_2 - t).$$

Определим постоянные C и C_2 из граничных условий:

$$x(0) = C \cos C_2 = 1, \quad x(\pi/2) = C \cos(C_2 - \pi/2) = C \sin C_2 = 0.$$

В результате получаем $C = 1$, $C_2 = 0$ и решение краевой задачи $x'(t) = \cos t$.

Пример 2.68 (Задача о наименьшей площади поверхности вращения).

Среди всех плоских гладких кривых, соединяющих точки $A(t_0, x_0)$ и $B(T, x_T)$, найти ту, которая при вращении вокруг оси абсцисс образует поверхность наименьшей площади (рис.2.6).

Решение. Как известно, площадь поверхности вращения находится по формуле

$$I[x(t)] = 2\pi \int_{t_0}^T x(t) \sqrt{1 + x'^2(t)} dt.$$

Поставленная задача сводится к определению гладкой кривой $x(t)$, удовлетворяющей граничным условиям $x(t_0) = x_0$, $x(T) = x_T$, на которой достигается минимум функционала $I[x(t)]$. Следовательно, требуется решить уравнение Эйлера.

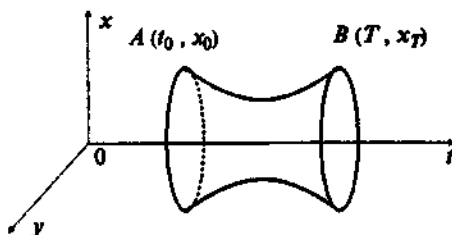


Рис.2.6

Заметим, что подынтегральная функция $F = x\sqrt{1+x'^2}$ явно не зависит от переменной t и, следовательно, уравнение Эйлера имеет первый интеграл (2.54):

$$F - x' F_{x'} = x\sqrt{1+x'^2} - x' \frac{xx'}{\sqrt{1+x'^2}} = C_1.$$

После очевидных упрощений имеем $\frac{x}{\sqrt{1+x'^2}} = C_1$.

Найдем общее решение полученного дифференциального уравнения. Положим $x' = \operatorname{sh} p$, тогда

$$x = C_1 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 p} = C_1 \operatorname{ch} p, \quad dx = C_1 \operatorname{sh} p \, dp,$$

$$dt = \frac{dx}{x'} = \frac{C_1 \operatorname{sh} p \, dp}{\operatorname{sh} p} = C_1 \, dp, \quad t = C_1 p + C_2.$$

Таким образом, искомая поверхность образуется вращением линии, уравнение которой в параметрической форме имеет вид $t = C_1 p + C_2$, $x = C_1 \operatorname{ch} p$.

Исключая параметр p , получаем $x = C_1 \operatorname{ch} \frac{t - C_2}{C_1}$ - семейство цепных линий, от вращения которых образуются поверхности, называемые *катеноидами*. Постоянные C_1 и C_2 находятся из граничных условий:

$$x(t_0) = C_1 \operatorname{ch} \left(\frac{t_0 - C_2}{C_1} \right) = x_0, \quad x(T) = C_1 \operatorname{ch} \left(\frac{T - C_2}{C_1} \right) = x_T.$$

В зависимости от положения точек A и B может существовать одно, два или не существовать ни одного решения.

2.7. Задачи для самостоятельного решения

1. Решить следующие уравнения с разделяющимися переменными и уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными:

1) $x - tx' = a(1 + t^2 x')$. Ответ: $x(t) = a + \frac{Ct}{1 + at}$;

2) $x' = \cos(t - x)$. Ответ: $\operatorname{ctg} \frac{t-x}{2} + t = C$;

3) $(2t + 2x - 1)dt + (t + x - 2)dx = 0$. Ответ: $(t + x + 1)^3 = Ce^{2t+x}$;

4) $\operatorname{tg} x \, dt - \operatorname{ctg} t \, dx = 0$. Ответ: $\sin x \cos t = C$;

5) $x' = e^{t-x}$. Ответ: $e^t - e^x = C$.

2. Решить следующие однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к однородным уравнениям:

1) $x' = e^{xy} + y$. Ответ: $\ln |t| + e^{-xy} = C$;

- 2) $(x^4 - 2t^3x)dt + (t^4 - 2tx^3)dx = 0$. Ответ: $x^3 + t^3 = Ctx$, особые решения: $x = 0, x = -t$;
 3) $t^2 - x^2 + 2txx' = 0$. Ответ: $t^2 - 2Cx + x^2 = 0$;
 4) $tx' - x = \frac{t}{\operatorname{arctg} \sqrt{t}}$. Ответ: $\sqrt{t} \operatorname{arctg} \sqrt{t} = \ln C \sqrt{t^2 + x^2}$.

3. Решить следующие линейные уравнения и уравнения, приводящиеся к линейным уравнениям:

- 1) $x \sin t + x' \cos t = 1$. Ответ: $x(t) = C \cos t + \sin t$;
 2) $(1 + t^2)x' + x = \operatorname{arctg} t$. Ответ: $x(t) = \operatorname{arctg} t - 1 + Ce^{-\operatorname{arctg} t}$;
 3) $(t + x^2)dx = xdt$. Ответ: $x^2 - t = Cx$;
 4) $4tx' + 3x = -e^t t^4 x^5$. Ответ: $t^3(e^t + C)x^4 = 1$;
 5) $(t^2 \ln x - t)x' = x$. Ответ: $t(\ln x + 1 + Cx) = 1$.

4. Решить следующие дифференциальные уравнения первого порядка:

- 1) $x'^2 + (x^2 - 1)x' - x^2 = 0$. Ответ: $x(t) = C + t, x(t) = \frac{1}{C + t}$;
 2) $tx'^2 - 2xx' + 4t = 0$. Ответ: $Ct^2 + 2Cx + 4 = 0$, особые решения: $x(t) = \pm 2t$;
 3) $txx'^2 - (t^2 + x^2)x' + tx = 0$. Ответ: $x(t) = Ct, x^2 - t^2 = C$;
 4) $x'^2 = 9x^4$. Ответ: $x^2 = \frac{1}{(3t + C)^2}$.

Указание: каждое уравнение предварительно разрешить как алгебраическое (квадратное) уравнение относительно $x'(t)$.

5. Решить следующие задачи Коши:

- 1) $x' - \frac{x}{t \ln t} = t \ln t, x(e) = e^{3/2}$. Ответ: $x(t) = \frac{1}{2} t^2 \ln t$;
 2) $x' \sin t - x \cos t = 1, x(\pi/2) = 0$. Ответ: $x(t) = -\cos t$;
 3) $x' + 3x \operatorname{tg} 3t = \sin 6t, x(0) = \frac{1}{3}$. Ответ: $x(t) = \cos 3t (1 - \frac{2}{3} \cos 3t)$;
 4) $(x^2 + 2x + t^2)x' + 2t = 0, x(1) = 0$. Ответ: $t^2 + x^2 = e^{-x}$;
 5) $(t^4 + 6t^2x^2 + x^4)dt + 4tx(t^2 + x^2)dx = 0, x(1) = 0$. Ответ: $t^5 + 10t^3x^2 + 5tx^4 = 1$;
 6) $x' = 4 + \sqrt{t} + (\sqrt{t})^2, x(1) = 2$. Ответ: $\operatorname{arctg} \sqrt{t} - 2 \ln |t| = \sqrt{t}$.

6. Решить следующие уравнения, неразрешенные относительно производной:

- 1) $x = e^{x'}(x' - 1)$. Ответ: $\begin{cases} t = e^p + C, \\ x = e^p(p - 1), \end{cases} x = -1$;
 2) $t = x' + \ln x'$. Ответ: $\begin{cases} t = p + \ln p, \\ x = \frac{1}{2}(p + 1)^2 + C; \end{cases}$
 3) $x = x' \ln x'$. Ответ: $\begin{cases} t = \frac{1}{2} \ln^2 p + \ln p + C, \\ x = p \ln p; \end{cases}$

4) $\arcsin \frac{t}{x'} = x'$. Ответ: $\begin{cases} t = p \sin p, \\ x = (p^2 - 1) \sin p + p \cos p + C; \end{cases}$

5) $x' = \operatorname{arctg} \frac{x}{x'^2}$. Ответ: $\begin{cases} t = p \operatorname{tg} p - \ln |\cos p| + C, \\ x = p^2 \operatorname{tg} p. \end{cases}$

Указание: ввести параметр p , обозначив $x' = p$.

7. Решить следующие дифференциальные уравнения второго порядка:

1) $tx'' = x' \ln \frac{x'}{t}$. Ответ: $x(t) = \frac{1}{C_1} t e^{1+C_1 t} - \frac{1}{C_1^2} e^{1+C_1 t} + C_2$;

2) $(1-t^2)x'' - tx' = 2$. Ответ: $x(t) = \arcsin^2 t + C_1 \arcsin t + C_2$;

3) $(x^2+1)xx'' = (3x^2-1)x'^2$. Ответ: $1+x^2 = \frac{1}{C_1 t + C_2}$.

Указание: Привести заданные уравнения второго порядка к уравнениям первого порядка относительно новой функции $x(t)$, обозначив $x' = z$. См. примечание.

8. Решить задачу Коши:

$x'' - \frac{x'}{t-1} = t(t-1)$, $x(2) = 1$, $x'(2) = -1$. Ответ: $x(t) = \frac{3t^4 - 4t^3 - 36t^2 + 72t + 8}{24}$.

9. Решить следующие дифференциальные уравнения:

1) $(x + \sqrt{t^2 + x^2})dt - tdx = 0$. Ответ: $x(t) = \frac{1}{2C} (t^2 - C^2)$, $C > 0$;

2) $\frac{dt}{t^2 - tx + x^2} = \frac{dx}{2x^2 - tx}$. Ответ: $x(x-2t)^3 = C(t-x)^2$;

3) $x' = e^{t+x}$. Ответ: $x(t) = -\ln(C - e^t)$;

4) $x'(t+x^2) = x$. Ответ: $t-x^2 = Cx$, $x=0$;

5) $txx' = x^2 + 2t^2$. Ответ: $x^2 = 4t^2 \ln Ct$;

6) $(t+x+4)dx + (t+x-2)dt = 0$. Ответ: $t^2 + 2tx - x^2 - 4t + 8x = C$;

7) $x' + y_i = t^2 x^4$. Ответ: $x(t) = \frac{1}{t(3 \ln C/t)^{1/3}}$;

8) $x'''(t-1) - x'' = 0$, $x(2) = 2$, $x'(2) = x''(2) = 1$. Ответ: $x(t) = \frac{1}{6}(t^3 - 3t^2 + 6t + 4)$;

9) $x''' = t \sin t$, $x(0) = x'(0) = 0$, $x''(0) = 2$. Ответ: $x(t) = t \cos t - 3 \sin t + t^2 + 2t$;

10) $x'^3 - 4xx' = 0$. Ответ: $x(t) = (C+t)^2$, $x(t) = (C-t)^2$, $x(t) = C$;

11) $x'^3 - x'e^{2t} = 0$. Ответ: $x(t) = C$, $x(t) = e^t + C$, $x(t) = C - e^t$;

12) $x' = x^2 - \frac{2}{t^2}$. Ответ: $x(t) = \frac{1}{t} + \frac{3t^2}{C-t^3}$.

10. Среди всех интегральных кривых уравнения $x'' = 6t$ найти ту, которая касается прямой $x(t) = t$ в начале координат. Ответ: $x(t) = t^3 + t$.

Указание: сформулировать и решить задачу Коши для заданного уравнения.

11. Решить следующие уравнения, не разрешенные относительно производной:

1) $x'^3 + x^2 - txx' = 0$. Ответ: $ptx = x^2 + p^3$, $x^3(2p + C) = p^4$; $x = 0$;

2) $x = tx'^2 - 2x'^3$.

Ответ: $t = \frac{C}{(p-1)^2} + 2p + 1$, $x = \frac{Cp^2}{(p-1)^2} + p^2$; $x = 0$; $x = t - 2$;

3) $x'(t - \ln x') = 1$. Ответ: $t = \ln p + \frac{1}{p}$, $x = p - \ln p + C$;

4) $x' \sin x' = t$. Ответ: $t = p \sin p$, $x = (p^2 - 1) \sin p + p \cos p + C$;

5) $x = x'(t + 1 - x')$. Ответ: $x = Ct + C(1 - C)$; $x = \frac{1}{4}(t + 1)^2$.

Примечания.

1. Решение задачи 6. Уравнение $x = e^{x'(x' - 1)}$, не разрешенное относительно производной (его нельзя записать в виде $x' = f(x, t)$), решаем методом введения параметра. Обозначив x' через p (p - параметр), получим выражение для $x(p)$: $x = e^p(p - 1)$. Остается в такой же форме получить соответствующее выражение для t , $t(p)$. Заметим, что из равенства $x' = p$ следует $dt = \frac{dx}{p}$ (при $p \neq 0$), а выражение для dx получаем, используя полученное выше выражение для $x(p)$, то есть $dx = e^p(p - 1 + 1)dp$. Поэтому

$$dt = \frac{dx}{p} = \frac{e^p p}{p} dp = e^p dp \quad \text{и} \quad t = \int e^p dp + C,$$

то есть $t = e^p + C$. Решение уравнения получено в параметрической форме:

$$\begin{cases} t = e^p + C, \\ x = e^p(p - 1). \end{cases}$$

При $p = 0$ находим другое решение, $x = -1$.

2. Решение задачи 7. Решим уравнение $tx'' = x' \ln x'/t$, понизив его порядок. Для этого обозначим $x'(t)$ через новую функцию $z(t)$, тогда $x'' = z'$ и уравнение принимает вид $tz' = z \ln z/t$. Это однородное уравнение первого порядка. Находим его общее решение: $z(t) = te^{C_1 t + 1}$, $C_1 \neq 0$, после чего определяем $x(t)$:

$$x(t) = \int te^{C_1 t + 1} dt + C_2 = \frac{1}{C_1} te^{1 + C_1 t} - \frac{1}{C_1^2} e^{1 + C_1 t} + C_2.$$

3. Линейные дифференциальные уравнения

n -го порядка

3.1. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

3.1.1. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

3.1.1.1. Нахождение общего решения однородного уравнения

Согласно теореме 1.3 общее решение линейного неоднородного уравнения (1.22) представляет собой сумму любого его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения (1.23). Следовательно, для решения неоднородного уравнения необходимо решить соответствующее ему однородное и найти какое-либо частное решение неоднородного уравнения. Задача нахождения частного решения рассматривается в следующем разделе.

Рассмотрим методы нахождения общего решения линейного однородного уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами:

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = 0, \quad (3.1)$$

где коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ - действительные числа.

Согласно теореме 1.4 общее решение уравнения (3.1) представляет собой линейную комбинацию частных решений, входящих в фундаментальную систему решений, то есть комбинацию любых n линейно независимых частных решений уравнения. Вид этих решений и метод их нахождения подсказывает следующий частный случай уравнения (3.1): $x' + ax = 0$. Это линейное уравнение первого порядка имеет решение $x(t) = e^{-at}$. Предположим, что решения уравнений высших порядков имеют такую же форму, то есть будем искать частные решения уравнения (3.1) в виде $x(t) = e^{\lambda t}$, где λ - некоторое подлежащее определению число. Подставив $x = e^{\lambda t}$ в (3.1) и поделив на $e^{\lambda t} \neq 0$, получим алгебраическое уравнение n -й степени следующего вида:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0. \quad (3.2)$$

Это уравнение определяет те λ , при которых функция $e^{\lambda t}$ является решением однородного уравнения (3.1) и называется его *характеристическим уравнением*. Для получения уравнения (3.2) на практике в уравнении (3.1) формально заменяются производные k -го порядка k -й степенью числа λ (на-

пример, x'' заменяется на λ^2 , x' заменяется на λ , а x заменяется на $\lambda^0 = 1$). Характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением n -го порядка, а значит, имеет n корней.

Если рассмотреть два корня характеристического уравнения λ_1 и λ_2 , такие что $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то соответствующие им функции $e^{\lambda_1 t}$ и $e^{\lambda_2 t}$ будут линейно независимыми частными решениями уравнения (3.1). Если все n корней характеристического уравнения различны, то линейно независимы в совокупности будут все соответствующие им функции $e^{\lambda_i t}$, $i = 1, \dots, n$. Однако, поскольку среди корней уравнения (3.2) могут оказаться равные (кратные корни), то соответствующие им частные решения, очевидно, линейно зависимы. Кроме того, характеристическое уравнение может иметь комплексный корень $\lambda = \alpha + j\beta$, которому соответствует комплекснозначная функция $e^{(\alpha + j\beta)t}$, а решения исходного уравнения (3.1) отыскиваются в классе действительных функций.

Следующие правила позволяют избежать затруднений при построении фундаментальной системы решений и решить задачу нахождения общего решения однородного уравнения.

П р а в и л о 3.1. (*Корни характеристического уравнения действительные, различные*). Если все корни характеристического уравнения (3.2) различные действительные числа, то есть $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$, то соответствующие им частные решения $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$, ..., $x_n(t) = e^{\lambda_n t}$ образуют фундаментальную систему решений. Общее решение $x(t, C_1, C_2, \dots, C_n)$ уравнения (3.1) в этом случае имеет вид (см. (1.25))

$$x(t, C_1, C_2, \dots, C_n) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}, \quad (3.3)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ - произвольные постоянные.

П р а в и л о 3.2. (*Корни характеристического уравнения комплексные, различные*). Если среди корней характеристического уравнения (3.2) есть комплексный корень $\lambda = \alpha + j\beta$, а значит, и сопряженный ему корень $\bar{\lambda} = \alpha - j\beta$ (по свойству алгебраических уравнений с действительными коэффициентами), то этой паре $\alpha \pm j\beta$ корней соответствуют два линейно независимых частных решения $x_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t$, $x_2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t$, которые и включают в фундаментальную систему решений вместо функций $e^{(\alpha + j\beta)t}$, $e^{(\alpha - j\beta)t}$. Соответствующая компонента общего решения уравнения (3.1) имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad (3.4)$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

П р а в и л о 3.3. (*Корни характеристического уравнения действительные, кратные*). Если среди корней характеристического уравнения (3.2) есть равные действительные числа $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k$, то корню λ_1 кратности k соответствуют k линейно независимых частных решений $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $x_2(t) = t e^{\lambda_1 t}$, ...

..., $x_k(t) = t^{k-1} e^{\lambda_1 t}$, а соответствующая компонента общего решения уравнения (3.1) имеет вид

$$x(t) = (C_1 + C_2 t + \dots + C_k t^{k-1}) e^{\lambda_1 t}, \quad (3.5)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_k$ - произвольные постоянные.

П р а в и л о 3.4. (Корни характеристического уравнения комплексные, кратные). Если среди корней характеристического уравнения (3.2) есть комплексный корень $\lambda = \alpha + i\beta$ кратности k , а значит, и сопряженный ему корень $\alpha - i\beta$ той же кратности, то этой паре $\alpha \pm i\beta$ корней соответствуют $2k$ линейно независимых частных решений:

$$x_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad x_2(t) = t e^{\alpha t} \cos \beta t, \dots, x_k(t) = t^{k-1} e^{\alpha t} \cos \beta t,$$

$$x_{k+1}(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad x_{k+2}(t) = t e^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, x_{2k}(t) = t^{k-1} e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Соответствующая компонента общего решения уравнения (3.1) имеет вид

$$x(t) = e^{\alpha t} [(C_1 + C_2 t + \dots + C_k t^{k-1}) \cos \beta t + (B_1 + B_2 t + \dots + B_k t^{k-1}) \sin \beta t], \quad (3.6)$$

где $C_1, \dots, C_k, B_1, \dots, B_k$ - произвольные постоянные.

Алгоритм нахождения общего решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

1. Записать характеристическое уравнение (3.2).
2. Найти корни характеристического уравнения.
3. Пользуясь правилами 3.1-3.4, выписать общее решение уравнения в зависимости от типа корней.

Пример 3.1. Решить дифференциальные уравнения:

$$a) x'' - x = 0; \quad б) x'' + x = 0.$$

Решение. 1. Записываем характеристические уравнения:

$$a) \lambda^2 - 1 = 0; \quad б) \lambda^2 + 1 = 0.$$

2. Находим корни: а) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$; б) $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$.

3. Выписываем частные решения исходных дифференциальных уравнений, соответствующие найденным корням, то есть фундаментальные системы решений, и общие решения в виде линейных комбинаций функций из фундаментальных систем:

а) поскольку корни действительные и различные, то по правилу 3.1 им ставятся в соответствие функции $x_1(t) = e^t, x_2(t) = e^{-t}$ и, следовательно, общее решение уравнения имеет вид $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$ (сравнить с (3.3));

б) поскольку корни-комплексные сопряженные числа, то, учитывая, что в данном случае $\alpha = 0, \beta = 1$, по правилу 3.2 им ставятся в соответствие функции $x_1(t) = \cos t, x_2(t) = \sin t$. Общее решение уравнения записываем в виде $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ (сравнить с (3.4)).

Заметим, что в примере "а" в качестве линейно независимых частных решений можно взять функции $\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2}$ и $\frac{x_1(t) - x_2(t)}{2}$, то есть функции $\text{ch } t$ и $\text{sh } t$. Эти функции также образуют фундаментальную систему решений, и общее решение уравнения "а" можно записать в виде $x(t) = C_1 \text{ch } t + C_2 \text{sh } t$.

Пример 3.2. Решить уравнения:

а) $4x'' + 4x' - 3x = 0$; б) $4x'' + 4x' + 3x = 0$; в) $4x'' + 4x' + x = 0$.

Решение. 1,2. Записываем характеристические уравнения и находим их корни:

а) $4\lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0$, $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$;

б) $4\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$, $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{2}/2$;

в) $4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

3. Выписываем фундаментальные системы решений для каждого дифференциального уравнения и общие решения:

а) поскольку корни действительные и различные, то по правилу 3.1 фундаментальную систему решений образуют функции $x_1(t) = e^{-3/2 t}$, $x_2(t) = e^{1/2 t}$ и общее решение уравнения записываем в виде (3.3):

$$x(t) = C_1 e^{-3/2 t} + C_2 e^{1/2 t};$$

б) поскольку корни комплексные сопряженные числа, то по правилу 3.2, учитывая, что в данном случае $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \sqrt{2}/2$, фундаментальную систему решений образуют функции $x_1(t) = e^{-1/2 t} \cos(\sqrt{2}t/2)$, $x_2(t) = e^{-1/2 t} \sin(\sqrt{2}t/2)$, и общее решение уравнения записываем в виде (3.4):

$$x(t) = C_1 e^{-1/2 t} \cos(\sqrt{2}t/2) + C_2 e^{-1/2 t} \sin(\sqrt{2}t/2) = e^{-1/2 t} (C_1 \cos(\sqrt{2}t/2) + C_2 \sin(\sqrt{2}t/2));$$

в) поскольку корни равные (корень $\lambda = -\frac{1}{2}$ имеет кратность 2), то по правилу 3.3 фундаментальную систему решений образуют функции $x_1(t) = e^{-1/2 t}$, $x_2(t) = t e^{-1/2 t}$, и общее решение уравнения записываем в виде (3.5): $x(t) = C_1 e^{-1/2 t} + C_2 t e^{-1/2 t} = e^{-1/2 t} (C_1 + C_2 t)$.

Рассмотренные в последнем примере дифференциальные уравнения являются уравнениями второго порядка, общий вид которых $x'' + px' + q = 0$. **Характеристический многочлен** (многочлен, стоящий слева в характеристическом уравнении) в данном случае является квадратным трехчленом $\lambda^2 + p\lambda + q$. Его корни зависят от значения дискриминанта $D = p^2 - 4q$. Все случаи корней характеристического уравнения для линейного однородного уравнения второго порядка рассмотрены в приведенных выше примерах. Отметим также, что частными случаями такого уравнения являются уравнения, рассмотренные в примерах В.4-В.6. Найдем, например, решение уравнения (В.5), обозначив $b_m = a^2$.

Пример 3.3. Найти решение уравнения:

$$x'' + a^2 x = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + a^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm ia$; фундаментальная система решений записывается в виде $x_1(t) = \cos at$, $x_2(t) = \sin at$, а общее решение - $x(t) = C_1 \cos at + C_2 \sin at$. Запишем последнее равенство в виде

$$x(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos at + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin at \right)$$

и, обозначив $\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = A$, $\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \sin \varphi$, $\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \cos \varphi$, получим общее решение уравнения в виде $x(t) = A \sin(\varphi + at)$. Это означает, что движение, описываемое рассматриваемым дифференциальным уравнением, представляет собой гармоническое колебание с амплитудой A , начальной фазой φ ($\tan \varphi = C_1/C_2$) и частотой a .

Пример 3.4. Найти общие решения уравнений:

- а) $x''' - 3x'' + 3x' - x = 0$; б) $x''' - 2x'' - 5x' + 6x = 0$; в) $2x''' - x'' + 8x' - 4x = 0$.

Решение. а) Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ можно записать в виде $(\lambda - 1)^3 = 0$, откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, то есть корень $\lambda = 1$ имеет кратность 3. Согласно правилу 3.3 фундаментальная система решений имеет вид $x_1(t) = e^t$, $x_2(t) = te^t$, $x_3(t) = t^2e^t$, и общее решение: $x(t) = e^t(C_1 + C_2t + C_3t^2)$.

б) Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$, которые легко подбираются как делители свободного члена. Поскольку все корни действительные и различные, то, согласно правилу 3.1, фундаментальная система решений имеет вид $x_1(t) = e^t$, $x_2(t) = e^{-2t}$, $x_3(t) = e^{3t}$ и общее решение: $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-2t} + C_3e^{3t}$.

в) Характеристическое уравнение $2\lambda^3 - \lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$ можно решить, раскладывая на множители характеристический многочлен, следующим образом:

$$2\lambda^3 - \lambda^2 + 8\lambda - 4 = \lambda^2(2\lambda - 1) + 4(2\lambda - 1) = (2\lambda - 1)(\lambda^2 + 4).$$

Приравнявая $(2\lambda - 1)(\lambda^2 + 4)$ нулю, находим один действительный корень $\lambda_1 = 1/2$ и два комплексных сопряженных $\lambda_{2,3} = \pm 2i$. Действительному корню согласно правилу 3.1 соответствует частное решение $x_1(t) = e^{t/2}$, а паре комплексных сопряженных корней согласно правилу 3.3 - два линейно независимых частных решения $x_2(t) = \cos 2t$, $x_3(t) = \sin 2t$. Полученная фундаментальная система решений позволяет записать общее решение заданного уравнения:

$$x(t) = C_1e^{t/2} + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t.$$

Пример 3.5. Решить уравнение:

$$x^V - x^{IV} + 8x''' - 8x'' + 16x' - 16x = 0.$$

Решение. 1. Записываем характеристическое уравнение:

$$\lambda^5 - \lambda^4 + 8\lambda^3 - 8\lambda^2 + 16\lambda - 16 = 0.$$

2. Найдем корни характеристического уравнения, для чего достаточно разложить левую часть на множители, применив, например, метод группировки:

$$\begin{aligned}\lambda^5 - \lambda^4 + 8\lambda^3 - 8\lambda^2 + 16\lambda - 16 &= \lambda^4(\lambda-1) + 8\lambda^2(\lambda-1) + 16(\lambda-1) = \\ &= (\lambda-1)(\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16) = (\lambda-1)(\lambda^2 + 4)^2.\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение имеет один действительный корень $\lambda_1 = 1$ и пару комплексных сопряженных корней кратности 2, а именно, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2i$ и $\lambda_4 = \lambda_5 = -2i$. Отметим, что число найденных корней равно порядку дифференциального уравнения, в данном случае - пяти.

3. Выписываем фундаментальную систему решений, используя правила 3.1 и 3.4: $x_1(t) = e^t$, $x_2(t) = \cos 2t$, $x_3(t) = t \cos 2t$, $x_4(t) = \sin 2t$, $x_5(t) = t \sin 2t$. Общее решение уравнения получаем в виде:

$$\begin{aligned}x(t) &= C_1 e^t + C_2 \cos 2t + C_3 t \cos 2t + C_4 \sin 2t + C_5 t \sin 2t = \\ &= C_1 e^t + (C_2 + C_3 t) \cos 2t + (C_4 + C_5 t) \sin 2t.\end{aligned}$$

3.1.1.2. Анализ устойчивости

Рассмотрим задачу исследования асимптотической устойчивости решения $x(t) \equiv 0$ уравнения (3.1). Как следует из п.5 разд. 1.2, решение неоднородного уравнения при $f(t) = 0$ определяется свободным движением, то есть $x(t) = x_{св}(t)$, а $x_{св}(t) = 0$.

Решение $x(t) = 0$ однородного уравнения (3.1) называется *асимптотически устойчивым*, если при ненулевых ограниченных начальных условиях свободное движение $x_{св}(t)$ ограничено при $t \in [t_0, +\infty)$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{св}(t) = 0$ (см. п.6 разд.1.2, где $\varphi_i(t) = 0$).

ТЕОРЕМА 3.1. (*Критерий устойчивости*).

Для асимптотической устойчивости решения $x(t) \equiv 0$ уравнения (3.1) необходимо и достаточно, чтобы корни λ_i , $i = 1, \dots, n$ характеристического уравнения имели отрицательные действительные части: $\operatorname{Re} \lambda_i = \alpha_i < 0$, $i = 1, \dots, n$, то есть располагались в левой полуплоскости плоскости комплексных чисел (рис.3.1).

Критерий асимптотической устойчивости следует из формул (3.3)-(3.6),

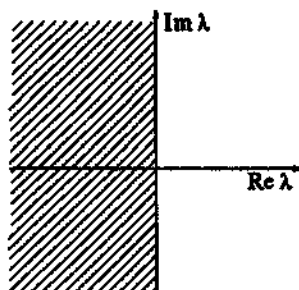


Рис.3.1

так как только при $\alpha_1 = \operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ экспоненты $e^{\alpha_1 t}$, входящие в запись общего решения, стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

Пример 3.6. Исследовать асимптотическую устойчивость решения $x(t) = 0$ уравнений из примеров 3.1, 3.2.

Решение. Рассмотрим вначале задачи из примера 3.1. В случае "а" корень $\lambda_1 = 1 > 0$ не лежит в левой полуплоскости, а в случае "б" действительная часть обоих корней $\alpha_{1,2} = \operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 0$, то есть корни расположены на мнимой оси (см. рис.3.1) и также не лежат в левой полуплоскости. В обоих случаях решение $x(t) = 0$ не является асимптотически устойчивым.

В задачах из примера 3.2 имеем: в случае "а" корень $\lambda_2 = 1/2 > 0$ и, следовательно, решение неустойчиво; в случае "б" $\alpha_{1,2} = \operatorname{Re} \lambda_{1,2} = -1/2 < 0$ и в случае "в" $\lambda_{1,2} = -1/2 < 0$. Таким образом, в случаях "б" и "в" выполняются условия теоремы 3.1, а значит, в обоих случаях решение $x(t) = 0$ асимптотически устойчиво.

Пример 3.7. Найти свободное движение и исследовать устойчивость в задаче:

$$x' + x = 0, \quad x(0) = 1/2.$$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda + 1 = 0$ имеет корень $\lambda = -1 < 0$. Согласно теореме 3.1 решение $x(t) = 0$ асимптотически устойчиво. Общее решение заданного уравнения получается из правила 3.1 и выражения (3.3), а именно, $x_0(t) = Ce^{-t}$. Свободное движение определяется (см. п.5, разд.1.2) решением однородного уравнения при ненулевых начальных условиях. Поскольку $x_0(0) = C = 1/2$, то $x_{ce}(t) = 1/2 e^{-t}$ - искомое свободное движение. Очевидно, что для полученного свободного движения при $t \rightarrow +\infty$ выполняется $x_{ce}(t) \rightarrow 0$.

Пример 3.8. Найти свободное движение и исследовать устойчивость в задаче:

$$x'' - 3x' + 2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 3.$$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$. Поскольку корни положительные, то из теоремы 3.1 заключаем, что свободное движение не является асимптотически устойчивым. Используя общее решение однородного уравнения $x_0(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$ (см. (3.3)) и начальные условия $x_0(0) = C_1 + C_2 = 1$, $x'_0(0) = C_1 + 2C_2 = 3$, находим $C_1 = -1$, $C_2 = 2$ и требуемое свободное движение $x_{ce}(t) = -e^t + 2e^{2t}$. Очевидно, что при $t \rightarrow +\infty$ $x_{ce}(t) \rightarrow +\infty$.

3.1.2. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

3.1.2.1. Метод подбора частного решения

Как отмечалось выше, для нахождения общего решения линейного неоднородного уравнения (1.22) кроме общего решения соответствующего ему однородного уравнения (1.23), правила нахождения которого рассмотрены в предыдущем пункте, нужно знать какое-либо частное решение неоднородного уравнения.

Одним из методов нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения является *метод подбора* или, иначе, *метод неопределенных коэффициентов*. Этот метод основан на том, что структура частного решения линейного неоднородного уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами:

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = f(t) \quad (3.7)$$

в некоторых случаях повторяет структуру правой части, то есть определяется видом функции $f(t)$. Это случаи, когда $f(t)$ можно представить в виде комбинации основных функций: многочленов, показательной и тригонометрических функций. Говоря точнее, метод подбора применим к функциям $f(t)$ *специального вида*, то есть к функциям, которые можно записать следующим образом:

$$f(t) = [R_q(t) \cos \beta t + P_l(t) \sin \beta t] e^{\alpha t}, \quad (3.8)$$

где $R_q(t), P_l(t)$ - многочлены переменной t степени q и l соответственно; α, β - заданные действительные числа.

П р а в и л о 3.5. Метод подбора состоит в следующем: если правая часть уравнения (3.7) имеет вид (3.8), то частное решение уравнения подбирается в виде

$$x_p(t) = e^{\alpha t} [Q_m(t) \cos \beta t + T_m(t) \sin \beta t] t^s, \quad (3.9)$$

где $m = \max(q, l)$; $Q_m(t), T_m(t)$ - многочлены переменной t степени m с неопределенными коэффициентами; натуральное число s определяется следующим образом:

$$s = \begin{cases} 0, & \text{если число } (\alpha + j\beta) \text{ не совпадает ни с одним} \\ & \text{из корней характеристического уравнения,} \\ k, & \text{если число } (\alpha + j\beta) \text{ совпадает с корнем кратности } k. \end{cases}$$

Алгоритм нахождения частного решения методом подбора

1. Определить параметры α, β, q, l правой части - функции $f(t)$.
2. Выписать структуру частного решения с неопределенными коэффициентами в виде (3.9).

3. Подставить полученное выражение для $x_4(t)$ в уравнение (3.7) и найти значения неопределенных коэффициентов, приравняв выражения при одинаковых функциях переменной t (метод неопределенных коэффициентов).

Пример 3.9. По заданным корням характеристического уравнения и заданной правой части $f(t)$ указать вид частного решения соответствующих дифференциальных уравнений:

а) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, f_1(t) = 1, f_2(t) = t, f_3(t) = e^t, f_4(t) = te^t;$

б) $\lambda_{1,2} = \pm i, f_1(t) = 1, f_2(t) = t, f_3(t) = e^t, f_4(t) = te^t;$

в) $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4} = 2 \pm 3i, f_1(t) = e^{-t}(1-t^3), f_2(t) = 2t^2.$

Решение. а) 1. Определим параметры α, β, q, i правых частей. Функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются многочленами и для них $\alpha = 0, \beta = 0$, причем $f_1(t) = 1$ - многочлен нулевой степени, следовательно, $q = 0$, а $f_2(t) = t$ - многочлен первой степени и $q = 1$. Для функции $f_3(t) = e^t$ имеем $\alpha = 1, \beta = 0, q = 0$; для функции $f_4(t) = te^t$ имеем $\alpha = 1, \beta = 0, q = 1$.

2. Выпишем вид частного решения уравнения для каждого случая функции $f_i(t), i = 1, 2, 3, 4$. Для функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ число $\alpha + \beta = 0$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения, поэтому $s = 0$. Частные решения в этих случаях подбираются в виде $x_{q1}(t) = A$ (многочлен нулевой степени с неопределенными коэффициентами), $x_{q2}(t) = At + B$ (многочлен первой степени с неопределенными коэффициентами). Для функций $f_3(t)$ и $f_4(t)$ число $\alpha + \beta = 1$ совпадает с корнем λ_1 кратности 1 характеристического уравнения, поэтому $s = 1$. Частные решения подбираются в виде $x_{q3}(t) = Ate^t$ и $x_{q4}(t) = e^t(At + B)t$.

б) 1. Параметры правых частей, как легко видеть, такие же, как и в примере "а".

2. Число $\alpha + \beta = 0$ для функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и число $\alpha + \beta = 1$ для функций $f_3(t)$ и $f_4(t)$ не совпадают ни с одним из корней характеристического уравнения, поэтому $s = 0$. Частные решения подбираются в виде

$$x_{q1}(t) = A, x_{q2}(t) = At + B, x_{q3}(t) = Ae^t \text{ и } x_{q4}(t) = e^t(At + B).$$

в) Отметим, что в данном примере частное решение подбирается для дифференциального уравнения четвертого порядка.

1. Определим параметры правых частей. Для функции $f_1(t)$, являющейся произведением показательной функции и многочлена, имеем $\alpha = -1, \beta = 0, q = 3$, а для функции $f_2(t)$, соответственно, $\alpha = 0, \beta = 0, q = 2$.

2. Выпишем вид частного решения уравнения для каждого случая функции $f_i(t), i = 1, 2$. Для функции $f_1(t)$ число $\alpha + \beta = -1$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения, поэтому $s = 0$ и частное решение подбирается в виде произведения многочлена третьей степени с неопределенными коэффициентами ($m = q = 3$) на показательную функцию e^{-t} , то есть $x_{q1}(t) = e^{-t}(At^3 + Bt^2 + Ct + D)$. Для функции $f_2(t)$ число $\alpha + \beta = 0$ совпадает с корнем $\lambda_{1,2}$ кратности 2 характеристического уравнения, поэтому $s = 2$ и част-

ное решение подбирается в виде произведения многочлена второй степени с неопределенными коэффициентами ($m = q = 2$) на t^2 : $x_q(t) = (At^2 + Bt + C)t^2$.

Пример 3.10. По заданным корням характеристического уравнения и заданной правой части $f(t)$ указать вид частного решения дифференциального уравнения:

а) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, f_1(t) = 2 \cos t, f_2(t) = 3 \sin 2t, f_3(t) = t \sin t$;

б) $\lambda_{1,2} = \pm i, f_1(t) = 2 \cos t, f_2(t) = 3 \sin 2t, f_3(t) = t \sin t$;

в) $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_{3,4} = 2i, \lambda_{5,6} = -2i, f_1(t) = 2 \cos t, f_2(t) = 3 \sin 2t, f_3(t) = t^2 \cos 2t$.

Решение. а) 1. Определим параметры α, β, q, l правых частей. Во всех случаях $\alpha = 0$; $\beta = 1$ для функций $f_1(t)$ и $f_3(t)$ и $\beta = 2$ для функции $f_2(t)$. Для функции $f_1(t)$, у которой отсутствует составляющая с $\sin t$, многочлен $P_l(t)$ равен нулю, а $R_q(t) = 2$, то есть является многочленом нулевой степени, и поэтому $q = 0$. Для функции $f_2(t)$ аналогично получаем $P_l(t) = 3$, а $R_q(t)$ равен нулю, следовательно, $l = 0$. Для функции $f_3(t)$ многочлен $P_l(t) = t$, то есть является многочленом первой степени и $l = 1$, а $R_q(t) = 0$.

2. Выпишем вид частного решения уравнения для каждого случая функции $f_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. Во всех случаях число $\alpha + \beta$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения, поэтому $s = 0$. Для функций $f_1(t)$, $f_2(t)$ степень $m = \max(q, l) = 0$, а для функции $f_3(t)$ $m = 1$. Частные решения подбираются в виде

$$x_{q1}(t) = A \cos t + B \sin t, \quad x_{q2}(t) = A \cos 2t + B \sin 2t,$$

$$x_{q3}(t) = (At + B) \cos t + (Ct + D) \sin t.$$

Отметим, что согласно формулам (3.8) и (3.9), несмотря на то, что в правой части уравнения присутствует только одна тригонометрическая функция $\cos \beta t$ или $\sin \beta t$, в подборе частного решения участвуют обе.

б) 1. Параметры правых частей, как легко видеть, такие же, как и в примере "а". Но вид подбираемых частных решений может быть другим, поскольку корни характеристического уравнения другие.

2. Для функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ число $\alpha + \beta = l$ совпадает с корнем λ_1 кратности 1 характеристического уравнения, поэтому $s = 1$. Для функции $f_3(t)$, как и выше, $s = 0$. Таким образом, частные решения подбираются в виде

$$x_{q1}(t) = (A \cos t + B \sin t)t, \quad x_{q2}(t) = A \cos 2t + B \sin 2t,$$

$$x_{q3}(t) = [(At + B) \cos t + (Ct + D) \sin t]t.$$

в) Отметим, что в данном примере частное решение подбирается для дифференциального уравнения шестого порядка.

Для функции $f_1(t)$ вид частного решения уравнения такой же, как и в соответствующей части примера "а", так как число $\alpha + \beta$ не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, то есть $x_{q1}(t) = A \cos t + B \sin t$. Для функций $f_2(t)$ и $f_3(t)$ число $\alpha + \beta = 2i$ совпадает с корнем характеристического уравнения кратности 2 (одним из пары комплексных сопряженных чисел $\pm 2i$), поэтому $s = 2$ и частное решение подбирается в виде

$$x_{q2}(t) = (A \cos 2t + B \sin 2t)t^2, \quad x_{q3}(t) = [(At^2 + Bt + C) \cos 2t + (Dt^2 + Et + F) \sin 2t]t^2.$$

Пример 3.11. По заданным корням характеристического уравнения и заданной правой части $f(t)$ указать вид частного решения соответствующих дифференциальных уравнений:

а) $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -3, f_1(t) = e^t(1-t)\cos 3t, f_2(t) = e^{-3t}t^2\sin t$;

б) $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i, \lambda_{3,4} = -3 \pm i, f_1(t) = e^t(1-t)\cos 3t, f_2(t) = e^{-3t}t^2\sin t$;

в) $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i, \lambda_{3,4} = 5, f_1(t) = e^t(\cos 2t - 3\sin 2t), f_2(t) = e^{5t}(\cos 2t - 3\sin 2t)$;

г) $\lambda_{1,4} = 2 \pm \frac{1}{2}i, \lambda_5 = -1, f_1(t) = e^{2t}((t^2-1)\cos \frac{1}{2}t + t\sin \frac{1}{2}t), f_2(t) = e^{\frac{1}{2}t}\cos t$.

Решение. а) 1. Определим параметры α, β, q, l правых частей. Для функции $f_1(t)$, у которой отсутствует составляющая с $\sin \beta t$, $P_1(t) = 0$, а $R_q(t) = 1 - t$, следовательно, $q = 1$; кроме того, $\beta = 3$ и $\alpha = 1$. Для функции $f_2(t)$ аналогично определяем, что $R_q(t) = 0$, $l = 2$, $\beta = 1$ и $\alpha = -3$.

2. Выпишем вид частного решения уравнения для каждого случая функции $f_i(t)$, $i = 1, 2$. В обоих случаях число $\alpha + i\beta$ комплексное ($\alpha + i\beta = 1 + 3i$ для $f_1(t)$ и $\alpha + i\beta = -3 + i$ для $f_2(t)$), а корни характеристического уравнения действительные, поэтому $s = 0$. Таким образом, частные решения подбираются в виде

$$x_{q1}(t) = e^t[(At + B)\cos 3t + (Ct + D)\sin 3t],$$

$$x_{q2}(t) = e^{-3t}[(At^2 + Bt + C)\cos t + (Dt^2 + Et + F)\sin t].$$

б) 1. Параметры правых частей такие же, как и в примере "а". Но вид подбираемых частных решений может быть другим, поскольку корни характеристического уравнения другие.

2. Для функции $f_1(t)$ число $\alpha + i\beta = 1 + 3i$ совпадает с корнем λ_1 кратности 1 характеристического уравнения, поэтому $s = 1$. Для функции $f_2(t)$ число $\alpha + i\beta = -3 + i$ совпадает с корнем λ_3 кратности 1 характеристического уравнения, поэтому также $s = 1$. Частные решения подбираются в виде

$$x_{q1}(t) = e^t[(At + B)\cos 3t + (Ct + D)\sin 3t]t,$$

$$x_{q2}(t) = e^{-3t}[(At^2 + Bt + C)\cos t + (Dt^2 + Et + F)\sin t]t.$$

в) 1. Определим параметры α, β, q, l правых частей. Для функции $f_1(t)$ оба многочлена $P_1(t)$ и $R_q(t)$ нулевой степени, то есть, $q = l = 0$ и, кроме того, $\beta = 2$ и $\alpha = 1$. Для функции $f_2(t)$ аналогично определяем: $q = l = 0$, $\beta = 2$ и $\alpha = 5$.

2. Выпишем вид частного решения уравнения для каждого случая функции $f_i(t)$, $i = 1, 2$. Для функции $f_1(t)$ число $\alpha + i\beta = 1 + 2i$ совпадает с корнем λ_1 кратности 1 характеристического уравнения, поэтому $s = 1$. Для функции $f_2(t)$ число $\alpha + i\beta = 5 + 2i$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения, поэтому $s = 0$. Частные решения подбираются в виде

$$x_{q1}(t) = e^t(A\cos 2t + B\sin 2t)t, \quad x_{q2}(t) = e^{5t}(A\cos 2t + B\sin 2t).$$

г) 1. Определим параметры α, β, q, l правых частей. Для функции $f_1(t)$ многочлены $P_1(t)$ и $R_q(t)$ имеют степени $l = 1$ и $q = 2$, кроме того, $\beta = \frac{1}{2}$ и

$\alpha = 2$. Для функции $f_2(t)$ многочлен $P_1(t) = 0$, а $R_q(t) = t$, поэтому $q = 1$ и, кроме того, $\beta = 2$ и $\alpha = \frac{1}{2}$.

2. Выпишем вид частного решения уравнения для каждого случая функции $f_i(t)$, $i = 1, 2$. Для функции $f_1(t)$ число $\alpha + \beta = 2 + \frac{1}{2}i$ совпадает с корнем кратности 2 характеристического уравнения, поэтому $s = 2$ и $m = \max(q, i) = \max(2, 1) = 2$. Для функции $f_2(t)$ число $\alpha + \beta = \frac{1}{2} + 2i$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения, поэтому $s = 0$ и $m = \max(q, i) = 1$. Частные решения подбираются в виде

$$x_{q1}(t) = e^{2t} [(At^2 + Bt + C) \cos \frac{1}{2}t + (Dt^2 + Et + F) \sin \frac{1}{2}t] t^2, \\ x_{q2}(t) = e^{i/2} [(At + B) \cos 2t + (Ct + D) \sin 2t].$$

Пример 3.12. Найти частные решения уравнений:

а) $x'' - x = te^t$; б) $x'' + x = te^t$.

Решение. а) 1. Для правой части te^t уравнения определяем параметры в соответствии с (3.8): $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $q = 1$.

2. Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 1 = 0$ различные, $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Учитывая, что число $\alpha + \beta = 1$ совпадает с корнем кратности 1, то есть $s = 1$, и $m = \max(q, i) = 1$, выписываем вид искомого частного решения:

$$x_q(t) = e^t (At + B)t \quad \text{или} \quad x_q(t) = (At^2 + Bt)e^t.$$

3. Подставляем в исходное уравнение выражения для $x_q(t)$ и

$$x_q''(t) = [e^t (2At + B + At^2 + Bt)]' = e^t [At^2 + t(B + 4A) + 2B + 2A].$$

После преобразований (сокращения на e^t и приведения подобных) получаем равенство $4At + 2B + 2A = t$. В этом равенстве приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях t в правой и левой частях: $4A = 1$, $2A + 2B = 0$, откуда $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$. Полученные значения неопределенных коэффициентов подставляем в вид искомого частного решения и записываем это решение: $x_q(t) = \frac{1}{4} e^t (t^2 - t)$.

б) 1. Параметры правой части $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $q = 1$, определены выше.

2. Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 1 = 0$ комплексные, $\lambda_{1,2} = \pm i$. Учитывая, что число $\alpha + \beta = 1$ не совпадает с найденными корнями, то есть $s = 0$, выписываем вид искомого частного решения $x_q(t) = e^t (At + B)$.

3. Подставляем в исходное уравнение выражения для $x_q(t)$ и

$$x_q''(t) = [e^t (At + B + A)]' = e^t (At + B + 2A).$$

После сокращения на e^t получаем равенство $2At + 2B + 2A = t$, из которого определяем: $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$. Итак, частным решением уравнения является функция $x_q(t) = \frac{t-1}{2} e^t$.

Пример 3.13. Найти частные решения уравнений:

а) $x'' - x = t \sin t$; б) $x'' + x = t \sin t$.

Решение. а) 1. Для правой части $t \sin t$ уравнения определяем параметры в соответствии с (3.8): $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $l = 1$.

2. Учитывая, что число $\alpha + i\beta = i$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения, то есть $s = 0$, и $m = 1$, выписываем вид искомого частного решения: $x_q(t) = (At + B) \sin t + (Ct + D) \cos t$.

3. Подставляем в исходное уравнение выражения для $x_q(t)$ и

$$\begin{aligned} x_q''(t) &= [A \sin t + (At + B) \cos t + C \cos t - (Ct + D) \sin t]' = \\ &= \cos t (2A - Ct - D) + \sin t (-At - B - 2C). \end{aligned}$$

После приведения подобных членов получаем равенство:

$$\cos t (2A - Ct - D - Ct - D) + \sin t (-At - B - 2C - At - B) = t \sin t.$$

В последнем равенстве приравниваем коэффициенты при $\cos t$ и $\sin t$ в левой и правой частях: $2A - 2Ct - 2D = 0$, $-2At - 2C - 2B = t$, а затем коэффициенты при одинаковых степенях t в обоих равенствах. Получаем систему для нахождения неопределенных коэффициентов, из которой находим $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -\frac{1}{2}$. Подставляя полученные коэффициенты в выражение для $x_q(t)$, получаем $x_q(t) = -\frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} t \sin t$.

б) 1. Параметры правой части $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $l = 1$ определены выше.

2. Учитывая, что число $\alpha + i\beta = i$ совпадает с корнем кратности 1, то есть $s = 1$, выписываем вид искомого частного решения:

$$x_q(t) = [(At + B) \sin t + (Ct + D) \cos t] t.$$

3. Подставляем в исходное уравнение выражения для $x_q(t)$ и

$$\begin{aligned} x_q''(t) &= (\sin t (2At + B - Ct^2 - Dt) + \cos t (At^2 + Bt + 2Ct + D))' = \\ &= \sin t (2A - 2D - 4Ct - Bt - At^2) + \cos t (2B + 2C + 4At - Dt - Ct^2). \end{aligned}$$

После группировки слагаемых приравниваем выражения при $\cos t$ и $\sin t$ в правой и левой частях: $2A - 4Ct - 2D = t$, $2B + 4At + 2C = 0$, откуда находим $A = 0$, $B = \frac{1}{4}$, $C = -\frac{1}{4}$, $D = 0$. Частным решением уравнения является функция

$$x_q(t) = \frac{t}{4} \sin t - \frac{t^2}{4} \cos t.$$

Пример 3.14. Найти частное решение уравнения:

$$x''' - 3x'' + 3x' - x = e^t.$$

Решение. 1. Для правой части e^t определяем параметры в соответствии с (3.8): $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $q = 0$.

2. Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ можно переписать в виде $(\lambda - 1)^3 = 0$, так что корень $\lambda = 1$ имеет кратность 3. Учитывая, что число $\alpha + i\beta = 1$ совпадает с корнем характеристического уравнения, то есть $s = 3$, выписываем вид искомого частного решения: $x_q(t) = Ae^t t^3$.

3. Подставляем в исходное уравнение выражения для $x_1(t)$ и его производных. После сокращения на e^t и приведения подобных получаем равенство $6A = 1$, откуда $A = 1/6$. Итак, частным решением уравнения является функция $x_4(t) = 1/6 t^3 e^t$.

Пример 3.15. По заданным корням характеристического уравнения и заданной правой части $f(t)$ указать вид частного решения соответствующих дифференциальных уравнений:

а) $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$, $\lambda_{3,4} = 3$, $f(t) = 1/2 e^{2t} \sin 3t - 2e^{3t}$;

б) $\lambda_{1,3} = -1$, $\lambda_{4,5} = 5$, $f(t) = e^{5t} \cos t + te^{-t}$;

в) $\lambda_{1,3} = -1$, $\lambda_{4,5} = 5$, $f(t) = e^{-t} \cos t + te^{5t}$.

Решение. В данном примере следует использовать замечание 1.4.

а) Функцию $f(t)$ представим в виде суммы $f_1(t) = 1/2 e^{2t} \sin 3t$ и $f_2(t) = -2e^{3t}$. Для каждого случая решаем задачу отыскания частного решения уравнения.

1. Определим параметры правых частей. Для функции $f_1(t)$ имеем $q = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$; для функции $f_2(t)$, соответственно, $q = 0$, $\alpha = 3$, $\beta = 0$.

2. Выпишем вид частного решения уравнения для каждого случая функции $f_i(t)$, $i = 1, 2$. Для функции $f_1(t)$ число $\alpha + \beta = 2 + 3i$ совпадает с корнем характеристического уравнения кратности 1, поэтому $s = 1$. Для функции $f_2(t)$ число $\alpha + \beta = 3$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения, поэтому $s = 0$. Таким образом, частные решения подбираются в виде $x_{11}(t) = e^{2t} (A \cos 3t + B \sin 3t)t$, $x_{12}(t) = De^{3t}$. В соответствии с замечанием 1.4 частное решение уравнения четвертого порядка с заданной правой частью $f(t)$ подбирается в виде $x_4(t) = x_{11}(t) + x_{12}(t) = e^{2t} (A \cos 3t + B \sin 3t)t + De^{3t}$.

б) Функцию $f(t)$ представим в виде суммы $f_1(t) = e^{5t} \cos t$ и $f_2(t) = te^{-t}$. Для каждого случая решаем задачу отыскания частного решения.

1. Определим параметры правых частей. Для функции $f_1(t)$ имеем $q = 0$, $\alpha = 5$, $\beta = 1$; для функции $f_2(t)$, соответственно $q = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = 0$.

2. Выпишем вид частного решения уравнения для каждого случая функции $f_i(t)$, $i = 1, 2$. Для функции $f_1(t)$ число $\alpha + \beta = 5 + i$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения, поэтому $s = 0$; для функции $f_2(t)$ число $\alpha + \beta = -1$ совпадает с корнем характеристического уравнения кратности 3, следовательно, $s = 3$. Поэтому частные решения подбираются в виде $x_{21}(t) = e^{5t} (A \cos t + B \sin t)$, $x_{22}(t) = e^{-t} (Ct + D)t^3$. Частное решение уравнения пятого порядка с заданной правой частью $f(t)$ подбирается в виде

$$x_5(t) = x_{21}(t) + x_{22}(t) = e^{5t} (A \cos t + B \sin t) + e^{-t} (Ct^4 + Dt^3).$$

в) Функцию $f(t)$ представим в виде суммы $f_1(t) = e^{-t} \cos t$ и $f_2(t) = te^{5t}$. Для каждого случая решаем задачу отыскания частного решения.

1. Определим параметры правых частей. Для функции $f_1(t)$ имеем $q = 0$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$; для функции $f_2(t)$ соответственно $q = 1$, $\alpha = 5$, $\beta = 0$.

2. Выпишем вид частного решения уравнения для каждой функции $f_i(t)$, $i = 1, 2$. Для функции $f_1(t)$ число $\alpha + \beta = -1 + i$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения, поэтому $s = 0$; для функции $f_2(t)$

число $\alpha + \beta = 5$ совпадает с корнем характеристического уравнения кратности 2, следовательно, $s = 2$. Поэтому частные решения подбираются в виде $x_{q1}(t) = e^{-t} (A \cos t + B \sin t)$, $x_{q2}(t) = e^{5t} (Ct + D)t^2$. Частное решение уравнения пятого порядка с заданной правой частью $f(t)$ подбирается в виде

$$x_q(t) = x_{q1}(t) + x_{q2}(t) = e^{-t} (A \cos t + B \sin t) + e^{5t} (Ct^3 + Dt^2).$$

Пример 3.16. Найти частное решение уравнения:

$$x''' - x'' + 3x' + 5x = 5e^{2t} \cos t + 4e^{-t}.$$

Решение. Прежде всего функцию $f(t)$ представим в виде суммы $f_1(t) = 5e^{2t} \cos t$ и $f_2(t) = 4e^{-t}$. Для каждого случая будем подбирать частные решения уравнения.

1. Для функции $f_1(t)$ имеем $q = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, для функции $f_2(t)$ соответственно $q = 0$, $\alpha = -1$, $\beta = 0$.

2. Характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda + 5 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$. Учитывая, что для функции $f_1(t)$ число $\alpha + \beta = 2 + i$ не совпадает ни с одним из корней, то есть $s = 0$, а для функции $f_2(t)$ число $\alpha + \beta = -1$ совпадает с корнем кратности 1, выписываем вид искомого частного решения: $x_q(t) = x_{q1}(t) + x_{q2}(t) = e^{2t} (A \cos t + B \sin t) + Dte^{-t}$.

3. Подставляем в уравнение выражения для $x_q(t)$ и его производных и методом неопределенных коэффициентов находим значения A, B, D . Для удобства определения этих коэффициентов подставим $x_{q1}(t)$ в уравнение с правой частью $f_1(t)$, а $x_{q2}(t)$ в уравнение с правой частью $f_2(t)$.

Подставляем $x_{q1}(t) = e^{2t} (A \cos t + B \sin t)$ и производные:

$$x_{q1}'(t) = e^{2t} (2A \cos t + 2B \sin t - A \sin t + B \cos t),$$

$$x_{q1}''(t) = e^{2t} (3A \cos t + 3B \sin t - 4A \sin t + 4B \cos t),$$

$$x_{q1}'''(t) = e^{2t} (2A \cos t + 2B \sin t - 11A \sin t + 11B \cos t)$$

в уравнение $x''' - x'' + 3x' + 5x = 5e^{2t} \cos t$. Сокращая на e^{2t} и приравнивая коэффициенты при $\cos t$ и $\sin t$ в правой и левой частях равенства, получаем систему из двух уравнений:

$$2A + 11B - 3A - 4B + 6A + 3B + 5A = 5 \quad \text{и} \quad 2B - 11A - 3B + 4A + 6B - 3A + 5B = 0$$

или

$$\begin{cases} 10A + 10B = 5, \\ -10A + 10B = 0, \end{cases}$$

откуда находим $A = B = 1/4$, следовательно, $x_{q1}(t) = 1/4 e^{2t} (\cos t + \sin t)$.

Подставляем $x_{q2}(t) = Dte^{-t}$ и производные

$$x_{q2}'(t) = De^{-t} (-t + 1), \quad x_{q2}''(t) = De^{-t} (t - 2), \quad x_{q2}'''(t) = De^{-t} (3 - t)$$

в уравнение $x''' - x'' + 3x' + 5x = 4e^{-t}$. Сократив на e^{-t} , получаем равенство $8D = 4$, то есть $D = \frac{1}{2}$, следовательно, $x_2(t) = \frac{1}{2} te^{-t}$. Частное решение исходного уравнения записываем в виде суммы:

$$x_4(t) = x_1(t) + x_2(t) = \frac{1}{4} e^{2t} (\cos t + \sin t) + \frac{1}{2} te^{-t}.$$

3.1.2.2. Метод вариации произвольных постоянных

Другим методом нахождения частного решения уравнения (3.7) является *метод вариации произвольных постоянных*. Этот метод применим как для уравнений с правыми частями специального вида, так и в случае функций более общего вида. Более того, его можно применять и для решения линейных уравнений с переменными коэффициентами (см. пример 3.30). Напомним, что для уравнения 1-го порядка метод вариации рассмотрен в разд. 2.4.1. В данном разделе для нахождения частного решения линейного уравнения n -го порядка будет использована та же идея, что и в разд. 2.4.1, а именно, совпадение форм записи решений неоднородного уравнения и соответствующего однородного. Распространяя эту идею на уравнение n -го порядка, при найденном общем решении $x_0(t) = C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t)$ однородного уравнения частное решение соответствующего неоднородного уравнения будем искать в виде $x(t) = C_1(t) x_1(t) + \dots + C_n(t) x_n(t)$, где функции $C_1(t), \dots, C_n(t)$ подлежат определению. Для уравнения 1-го порядка такая функция была только одна и определялась в результате подстановки подбрасываемого решения $x(t) = C_1(t) x_1(t)$ в уравнение. Поскольку для уравнения n -го порядка требуется определить n функций $C_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, то для их нахождения необходимо иметь n условий. Эти условия можно получить, если предположить, что форму записи относительно однородного уравнения сохраняет не только решение неоднородного уравнения, но и его производные до $n-1$ порядка включительно. Для реализации этого предположения продифференцируем выражение

$$x(t) = C_1(t) x_1(t) + \dots + C_n(t) x_n(t)$$

$(n-1)$ раз и после каждого дифференцирования будем приравнять нулю совокупность слагаемых, содержащих производные искомых функций $C_k'(t)$, $k = 1, \dots, n$. Отметим, что таких слагаемых нет в выражениях производных решений однородного уравнения, где $C_k = \text{const}$, $k = 1, \dots, n$. В результате таких действий получится система из $(n-1)$ уравнения с неизвестными $C_1'(t), C_2'(t), \dots, C_n'(t)$. Еще одно уравнение получится в результате подстановки $x(t)$ в уравнение (3.7). В итоге для нахождения неизвестных функций $C_k(t)$, $k = 1, \dots, n$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n C_i'(t) x_i(t) = 0, \\ \sum_{i=1}^n C_i'(t) x_i'(t) = 0, \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n C_i'(t) x_i^{(n-1)}(t) = \frac{f(t)}{a_n}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Определитель этой алгебраической системы не равен нулю, так как это *определитель Вронского* линейно независимых решений, а значит, система (3.10) имеет единственное решение - набор функций $C_1'(t), C_2'(t), \dots, C_n'(t)$. Интегрируя полученные равенства, найдем $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$; при этом возникающие при интегрировании постоянные будем полагать равными нулю. Тем самым будет найдено частное решение неоднородного уравнения.

З а м е ч а н и е 3.1. Если при интегрировании выписать общий вид первообразных (совокупность первообразных), то есть записать выражения для $C_i(t)$ с произвольными постоянными, то получающееся в результате выражение будет общим решением неоднородного уравнения.

Алгоритм нахождения частного решения методом вариации произвольных постоянных

1. Решить однородное уравнение (3.1), соответствующее данному неоднородному уравнению (3.7) (алгоритм решения этой задачи приведен в разд.3.1.1.1). Полученное решение записать в виде

$$x_0(t) = C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t),$$

где $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ - фундаментальная система решений уравнения (3.1).

2. Выписать структуру частного решения неоднородного уравнения в виде $x_0(t) = C_1(t) x_1(t) + \dots + C_n(t) x_n(t)$.

3. Записать систему (3.10) для определения функций $C_i'(t)$, $i = 1, \dots, n$ и найти эти функции.

4. Найти функции $C_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, путем интегрирования $C_i'(t)$, $i = 1, \dots, n$, (произвольные постоянные, возникающие при интегрировании, положить равными нулю).

5. Полученные функции $C_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, подставить в выражение для $x_0(t)$ и выписать частное решение неоднородного уравнения.

Пример 3.17. Найти частное решение уравнения:

$$x'' - 4x' + 5x = \frac{e^{2t}}{\cos t}.$$

Решение. 1. Решаем однородное уравнение $x'' - 4x' + 5x = 0$, для чего воспользуемся алгоритмом, приведенным в разд.3.1.1:

- а) выписываем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$;
- б) находим его корни $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$;
- в) выписываем общее решение однородного уравнения, используя правило 3.2 из разд.3.1.1.1:

$$x_0(t) = C_1 e^{2t} \cos t + C_2 e^{2t} \sin t,$$

здесь $x_1(t) = e^{2t} \cos t$, $x_2(t) = e^{2t} \sin t$ - фундаментальная система решений.

2. Частное решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде $x_*(t) = C_1(t)e^{2t} \cos t + C_2(t)e^{2t} \sin t$.

3. Записываем систему (3.10), учитывая, что $n = 2$, $a_n = 1$, $f(t) = \frac{e^{2t}}{\cos t}$:

$$\begin{cases} C_1'(t)e^{2t} \cos t + C_2'(t)e^{2t} \sin t = 0, \\ C_1'(t)(2e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t) + C_2'(t)(2e^{2t} \sin t + e^{2t} \cos t) = \frac{e^{2t}}{\cos t}, \end{cases}$$

или, сокращая на e^{2t} ,

$$\begin{cases} C_1'(t) \cos t + C_2'(t) \sin t = 0, \\ C_1'(t) (2 \cos t - \sin t) + C_2'(t) (2 \sin t + \cos t) = \frac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

Решить полученную систему можно разными способами, например, используя правило Крамера. В данном случае удобнее сначала преобразовать второе уравнение, а именно, умножить обе части первого уравнения на -2 и прибавить ко второму. В результате получим уравнение:

$$C_1'(t)(-\sin t) + C_2'(t) \cos t = \frac{1}{\cos t}$$

и, следовательно, систему уравнений, равносильную исходной:

$$\begin{cases} C_1'(t) \cos t + C_2'(t) \sin t = 0, \\ -C_1'(t) \sin t + C_2'(t) \cos t = \frac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

По правилу Крамера получим решение:

$$C_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin t \\ \frac{1}{\cos t} & \cos t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}}, \quad C_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & \frac{1}{\cos t} \end{vmatrix}}{1},$$

или $C_1'(t) = -\tan t$ и $C_2'(t) = 1$.

4. Находим функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$:

$$C_1(t) = \int -\operatorname{tg} t \, dt = \ln |\cos t|, \quad C_2(t) = \int dt = t.$$

5. Записываем частное решение исходного неоднородного уравнения:

$$x_q(t) = e^{2t} (\cos t \ln |\cos t| + t \sin t).$$

Если в п.4 добавить произвольные постоянные, то $C_1(t) = \ln |\cos t| + C_1$, $C_2(t) = t + C_2$. В этом случае получаем общее решение рассматриваемого неоднородного уравнения (см. замечание 3.1):

$$x(t) = e^{2t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{2t} (\cos t \ln |\cos t| + t \sin t).$$

3.1.2.3. Решение задачи Коши. Анализ выходных процессов

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} a_n x^{(n)} + \dots + a_0 x = f(t), \\ x(t_0) = x_0, \\ x'(t_0) = x'_0, \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}, \end{cases} \quad (3.11)$$

являющуюся частным случаем (1.28). Общий алгоритм решения задачи Коши, изложенный в п.4 разд.1.2, с учетом результатов разд.3.1.1.1, 3.1.2.1 и 3.1.2.2 принимает следующий конкретный вид.

Алгоритм решения задачи Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка

1. Выписать однородное уравнение, соответствующее заданному неоднородному, и найти его общее решение $x_0(t)$, пользуясь алгоритмом из разд.3.1.1.1.
2. Найти частное решение $x_q(t)$ неоднородного уравнения, используя либо метод подбора (см. алгоритм из разд.3.1.2.1), либо метод вариации произвольных постоянных (см. алгоритм из разд.3.1.2.2).
3. Записать общее решение неоднородного уравнения в виде суммы:

$$x(t) = x_0(t) + x_q(t).$$

4. Найти частное решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее заданным в (3.11) начальным условиям.

Пример 3.18. Решить задачу Коши:

$$x' + 2x = -3t + 2, \quad x(0) = 0.$$

Решение. 1. Найдем общее решение однородного уравнения $x' + 2x = 0$:

- а) записываем характеристическое уравнение $\lambda + 2 = 0$;
- б) находим его корень $\lambda = -2$;
- в) выписываем общее решение однородного уравнения, используя правило 3.1 из разд.3.1.1.1: $x_0(t) = Ce^{-2t}$.

2. Найдем частное решение неоднородного уравнения методом подбора:

- а) параметры правой части $q = 1, \alpha = 0, \beta = 0$;
- б) учитывая, что число $\alpha + i\beta = 0$ не совпадает с корнем характеристического уравнения, то есть $s = 0$, и $m = 1$, ищем частное решение в виде $x_*(t) = A + Bt$ (см. (3.9));

- в) подставляя $x_*(t) = A + Bt$ в неоднородное уравнение, получаем

$$B + 2A + 2Bt = -3t + 2,$$

откуда $B + 2A = 2, 2B = -3$, следовательно, $A = 1,75, B = -1,5$, и $x_*(t) = 1,75 - 1,5t$.

3. Общее решение неоднородного уравнения записываем в виде суммы:

$$x(t) = x_0(t) + x_*(t) = Ce^{-2t} + 1,75 - 1,5t.$$

4. Искомое частное решение удовлетворяет начальному условию $x(0) = 0$, поэтому $C + 1,75 = 0, C = -1,75$ и, значит, $x(t) = -1,75e^{-2t} + 1,75 - 1,5t$ - решение рассматриваемой задачи Коши. Отметим, что полученное решение совпадает с результатом примера 2.28.

Пример 3.19. Решить задачу Коши из примера В.1:

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = E, \quad u_c(0) = 0.$$

Решение. 1. Найдем общее решение однородного уравнения

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0:$$

- а) записываем характеристическое уравнение: $RC\lambda + 1 = 0$;
- б) находим его корень $\lambda = -\frac{1}{RC}$;
- в) выписываем общее решение однородного уравнения, используя правило 3.1 из разд.3.1.1.1: $u_{c0}(t) = Ce^{-t/RC}$.

2. Найдем частное решение неоднородного уравнения методом подбора:

- а) параметры правой части $q = 0, \alpha = 0, \beta = 0$;
- б) учитывая, что число $\alpha + i\beta = 0$ не совпадает с корнем характеристического уравнения, то есть $s = 0$, и $m = 0$, ищем частное решение в виде $u_{c*}(t) = A$ (см. (3.9));

- в) подставляя $u_{c*}(t) = A$ в неоднородное уравнение, получаем $A = E$ и $u_{c*}(t) = E$.

3. Общее решение неоднородного уравнения записываем в виде суммы

$$u_c(t) = u_{\text{св}}(t) + u_{\text{св}}(t) = Ce^{-t/RC} + E.$$

4. Искомое частное решение удовлетворяет начальному условию $u_c(0) = 0$, поэтому $C + E = 0$, $C = -E$ и, значит, $u_c(t) = E[1 - e^{-t/RC}]$ - решение рассматриваемой задачи Коши.

Пример 3.20. Решить задачу Коши:

$$x'' + 4x = \cos 2t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1.$$

Решение. 1. Найдем общее решение однородного уравнения $x'' + 4x = 0$:

- записываем характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4 = 0$;
- находим его корни $\lambda_{1,2} = \pm 2i$;
- выписываем общее решение однородного уравнения, используя правило 3.2 из разд.3.1.1.1:

$$x_0(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t.$$

2. Найдем частное решение неоднородного уравнения двумя способами: методом подбора и методом вариации произвольных постоянных.

Первый способ (метод подбора): а) параметры правой части $l = 0$, $q = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$;

б) учитывая, что число $\alpha + i\beta = 2i$ совпадает с корнем кратности 1 характеристического уравнения, то есть $s = 1$, и $m = 1$, ищем частное решение в виде $x_q(t) = t(A \cos 2t + B \sin 2t) = At \cos 2t + Bt \sin 2t$ (см. (3.9));

в) подставляя $x_q(t)$ и его производные

$$x_q'(t) = A \cos 2t - 2At \sin 2t + B \sin 2t + 2Bt \cos 2t,$$

$$x_q''(t) = -4A \sin 2t - 4At \cos 2t + 4B \cos 2t - 4Bt \sin 2t$$

в неоднородное уравнение, получаем $4B \cos 2t - 4A \sin 2t = \cos 2t$, откуда

$$A = 0, \quad B = 1/4 \text{ и } x_q(t) = 1/4 t \sin 2t.$$

Второй способ (метод вариации произвольных постоянных):

а) учитывая найденное выше общее решение однородного уравнения, частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$x_q(t) = C_1(t) \cos 2t + C_2(t) \sin 2t;$$

б) записываем систему (3.10):

$$\begin{cases} C_1'(t) \cos 2t + C_2'(t) \sin 2t = 0, \\ -2C_1'(t) \sin 2t + 2C_2'(t) \cos 2t = \cos 2t, \end{cases}$$

откуда $C_1'(t) = -1/4 \sin 4t$, $C_2'(t) = 1/2 \cos^2 2t$;

в) находим функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$:

$$C_1(t) = -1/4 \int \sin 4t dt = 1/16 \cos 4t,$$

$$C_2(t) = 1/2 \int \cos^2 2t dt = 1/4 \int (1 + \cos 4t) dt = 1/4 t + 1/16 \sin 4t;$$

г) записываем частное решение исходного неоднородного уравнения:

$$\begin{aligned}x_4(t) &= \frac{1}{16} \cos 4t \cos 2t + (\frac{1}{4}t + \frac{1}{16} \sin 4t) \sin 2t = \\&= \frac{1}{32} \cos 6t + \frac{1}{32} \cos 2t + \frac{1}{4}t \sin 2t - \frac{1}{32} \cos 2t - \frac{1}{32} \cos 6t = \frac{1}{4}t \sin 2t.\end{aligned}$$

3. Общее решение неоднородного уравнения записываем в виде суммы:

$$x(t) = x_0(t) + x_4(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{1}{4}t \sin 2t.$$

4. Искомое частное решение удовлетворяет начальным условиям: $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$. Используя эти условия, находим $C_1 = 1$, $2C_2 = -1$, и, значит, решение рассматриваемой задачи Коши имеет вид

$$x(t) = \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{4}t \sin 2t.$$

Пример 3.21. Решить задачу Коши:

$$x''' - 3x'' + 3x' - x = e^t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1, \quad x''(0) = 1.$$

Решение. 1. Найдем общее решение однородного уравнения

$$x''' - 3x'' + 3x' - x = 0.$$

Для этого выполним следующие действия:

а) записываем характеристическое уравнение $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ или $(\lambda - 1)^3 = 0$;

б) находим его корни: $\lambda_{1,2,3} = 1$, то есть корень $\lambda = 1$ имеет кратность 3;

в) выписываем общее решение однородного уравнения, используя правило 3.3 из разд.3.1.1.1:

$$x_0(t) = e^t (C_1 + C_2 t + C_3 t^2).$$

2. Частное решение неоднородного уравнения найдено методом подбора в примере 3.14: $x_4(t) = \frac{1}{6} t^3 e^t$.

3. Общее решение неоднородного уравнения:

$$x(t) = x_0(t) + x_4(t) = e^t (C_1 + C_2 t + C_3 t^2) + \frac{1}{6} t^3 e^t.$$

4. Находим частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Для этого определяем производные:

$$x'(t) = e^t (C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_2 + 2C_3 t) + \frac{1}{6} e^t (3t^2 + t^3),$$

$$x''(t) = e^t (C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + 2C_2 + 4C_3 t + 2C_3) + \frac{1}{6} e^t (t^3 + 6t^2 + 6t).$$

Используя начальные условия $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = 1$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_1 + C_2 = -1, \\ C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 1, \end{cases}$$

из которой находим: $C_1 = 1$, $C_2 = -2$, $C_3 = 2$, и, следовательно, решение рассматриваемой задачи Коши имеет вид

$$x(t) = e^t (\frac{1}{6} t^3 + 2t^2 - 2t + 1).$$

Пример 3.22. Решить задачу Коши:

$$x'' - 4x' + 5x = \frac{e^{2t}}{\cos t}, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 4.$$

Решение. 1. Общее решение однородного уравнения $x'' - 4x' + 5x = 0$ получено в примере 3.17:

$$x_0(t) = e^{2t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

2. Частное решение неоднородного уравнения найдено методом вариации произвольных постоянных в примере 3.17: $x_*(t) = e^{2t} (\cos t \ln |\cos t| + t \sin t)$.

3. Общее решение неоднородного уравнения записываем в виде суммы:

$$x(t) = x_0(t) + x_*(t) = e^{2t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t + \cos t \ln |\cos t| + t \sin t).$$

4. Находим частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Для этого записываем производную:

$$\begin{aligned} x'(t) = e^{2t} (2C_1 \cos t + 2C_2 \sin t + 2\cos t \ln |\cos t| + 2t \sin t - \\ - C_1 \sin t + C_2 \cos t - \sin t \ln |\cos t| + \cos t (-\operatorname{tg} t) + \sin t + t \cos t). \end{aligned}$$

Используя начальные условия $x(0) = 2$, $x'(0) = 4$, получаем $C_1 = 2$ и $2C_1 + C_2 = 4$, откуда $C_1 = 2$, $C_2 = 0$, и, следовательно, решение рассматриваемой задачи Коши $x(t) = e^{2t} (2 \cos t + \cos t \ln |\cos t| + t \sin t)$.

Рассмотрим применение алгоритма решения задачи Коши для решения задачи анализа выходных процессов. Напомним, что последовательность решения задачи анализа (1.29), (1.30), приведенная в разд. 1.2, состоит в нахождении свободного и вынужденного движений и получении результата в виде их суммы.

Пример 3.23. Найти свободное и вынужденное движения, а также выходной сигнал динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$x' + x = g(t)$$

с начальным условием $x(0) = \frac{1}{2}$ при входном сигнале $g(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t > 0, \\ 0, & \text{при } t \leq 0. \end{cases}$

Решение. 1. Находим свободное движение как решение задачи Коши: $x' + x = 0$, $x(0) = \frac{1}{2}$. Решение этой задачи получено в примере 3.7: $x_{\text{св}}(t) = \frac{1}{2} e^{-t}$.

2. Находим вынужденное движение как решение задачи Коши для неоднородного уравнения с нулевым начальным условием $x' + x = 1$, $x(0) = 0$:

а) общее решение однородного уравнения $x_0(t) = Ce^{-t}$ (см. пример 3.7);

б) частное решение неоднородного уравнения ищется в виде $x_*(t) = A$, и после подстановки в неоднородное уравнение имеем $A = 1$ и $x_*(t) = 1$;

в) общее решение неоднородного уравнения $x(t) = x_0(t) + x_*(t) = Ce^{-t} + 1$;

г) используя начальное условие $x(0) = 0$, получаем $C + 1 = 0$, откуда $C = -1$, и частное решение, удовлетворяющее нулевому начальному условию: $x(t) = 1 - e^{-t} = x_{\text{вын}}(t)$ - вынужденное движение системы.

3. Определяем искомый выходной сигнал как сумму:

$$x(t) = x_{\text{св}}(t) + x_{\text{вын}}(t) = \frac{1}{2} e^{-t} + 1 - e^{-t} = 1 - \frac{1}{2} e^{-t}.$$

Пример 3.24. Найти свободное и вынужденное движения, а также выходной сигнал динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$x'' - 3x' + 2x = g(t)$$

с начальными условиями $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$ при входном сигнале

$$g(t) = \begin{cases} 2e^{3t}, & \text{при } t > 0, \\ 0, & \text{при } t \leq 0. \end{cases}$$

Решение. 1. Находим свободное движение как решение задачи Коши $x'' - 3x' + 2x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$. Решение этой задачи получено в примере 3.8: $x_{\text{св}}(t) = -e^t + 2e^{2t}$.

2. Находим вынужденное движение как решение задачи Коши для неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями:

$$x'' - 3x' + 2x = 2e^{3t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0;$$

а) общее решение однородного уравнения: $x_0(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$ (см. пример 3.8);

б) частное решение неоднородного уравнения найдем методом подбора. Параметры правой части: $q = 0$, $\alpha = 3$, $\beta = 0$, число $\alpha + \beta = 3$ не совпадает с корнями $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ характеристического уравнения, поэтому $x_{\text{н}}(t) = Ae^{3t}$.

После подстановки $x_{\text{н}}(t) = Ae^{3t}$ в неоднородное уравнение имеем:

$$9e^{3t}A - 9Ae^{3t} + 2Ae^{3t} = 2e^{3t},$$

откуда $A = 1$ и $x_{\text{н}}(t) = e^{3t}$;

в) общее решение неоднородного уравнения:

$$x(t) = x_0(t) + x_{\text{н}}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + e^{3t},$$

г) используя начальные условия $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, получаем $C_1 + C_2 + 1 = 0$ и $C_1 + 2C_2 + 3 = 0$, откуда $C_1 = 1$, $C_2 = -2$. Частное решение, удовлетворяющее нулевому начальному условию, имеет вид $x(t) = e^t - 2e^{2t} + e^{3t} = x_{\text{вын}}(t)$ - вынужденное движение системы.

3. Определяем искомый выходной сигнал как сумму:

$$x(t) = x_{\text{св}}(t) + x_{\text{вын}}(t) = -e^t + 2e^{2t} + e^t - 2e^{2t} + e^{3t} = e^{3t}.$$

3.1.2.4. Применение переходных функций для анализа выходных процессов

В разд.1.2 сформулирована постановка задачи анализа выходных процессов, а именно задача нахождения реакции динамической системы на входное воздействие. Эта задача сводится к определению суммы свободного и вынужденного движений. Задача нахождения свободного движения решается методами, изложенными в разд.3.1.1.1.

Рассмотрим более подробно задачу нахождения вынужденного движения, то есть решения уравнения:

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = b_m g^{(m)}(t) + b_{m-1} g^{(m-1)}(t) + \dots + b_0 g(t) \quad (3.12)$$

с нулевыми начальными условиями:

$$x(0) = 0, x'(0) = 0, \dots, x^{(n-1)}(0) = 0, \quad (3.13)$$

где $g(t)$ - заданная функция, которая при решении многих технических задач интерпретируется как входной сигнал (входное воздействие); $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$ - постоянные коэффициенты; n, m - заданные числа.

В данном разделе среди множества входных сигналов выделяются два специальных сигнала: импульсное воздействие в виде дельта-функции и единичное ступенчатое воздействие.

Под *дельта-функцией* можно понимать идеализацию входного воздействия, имеющего вид импульса конечной длительности. Дельта-функция $\delta(t - \tau)$ определяется следующей формулой [18]:

$$\int_a^b f(t) \delta(t - \tau) dt = \begin{cases} f(\tau + 0), & a \leq \tau < b, \\ 0, & \tau < a \text{ или } \tau \geq b, \end{cases} \quad (3.14)$$

а *единичная ступенчатая функция* $K(t - \tau)$ - формулой

$$K(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t > \tau, \\ 0, & t \leq \tau. \end{cases} \quad (3.15)$$

В приведенных формулах τ - момент приложения воздействия, $f(t)$ - любая кусочно-непрерывная функция, $f(\tau + 0)$ - предел справа в точке τ . В дальнейшем всегда будем считать, что $\tau = 0$.

Связь между дельта-функцией и единичной ступенчатой функцией выражается следующим соотношением:

$$K(t) = \int_0^t \delta(\eta) d\eta.$$

Это равенство формально может быть записано в виде

$$\frac{dK(t)}{dt} = \delta(t). \quad (3.16)$$

С помощью введенных в рассмотрение двух специальных сигналов определяются две соответствующие им переходные функции.

Импульсной переходной функцией $K(t)$ называется решение уравнения (3.12) с нулевыми начальными условиями (3.13) при $g(t) = \delta(t)$:

$$a_n K^{(n)} + a_{n-1} K^{(n-1)} + \dots + a_0 K = b_m \delta^{(m)}(t) + b_{m-1} \delta^{(m-1)}(t) + \dots + b_0 \delta(t), \quad (3.17)$$

$$K(0) = 0, \dots, K^{(n-1)}(0) = 0.$$

Единичной переходной функцией $h(t)$ называется решение уравнения (3.12) с нулевыми начальными условиями (3.13) при $g(t) = 1(t)$:

$$a_n h^{(n)} + a_{n-1} h^{(n-1)} + \dots + a_0 h = b_m 1^{(m)}(t) + b_{m-1} 1^{(m-1)}(t) + \dots + b_0 1(t), \quad (3.18)$$

$$h(0) = 0, \dots, h^{(n-1)}(0) = 0.$$

Продифференцировав уравнение (3.18) с учетом связи (3.16), получим

$$K(t) = \frac{dh(t)}{dt}.$$

Известно [33], что с помощью импульсной переходной функции может быть найдена реакция на любое входное воздействие $g(t)$ по формуле:

$$x(t) = \int_0^t K(t - \xi) g(\xi) d\xi = \int_0^t K(\eta) g(t - \eta) d\eta. \quad (3.19)$$

Для нахождения импульсной переходной функции используется **укороченное уравнение**:

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = g_0(t), \quad (3.20)$$

где $g_0(t)$ - эквивалентное входное воздействие, заменяющее правую часть уравнения (3.12).

Алгоритмы нахождения вынужденного движения (решения задачи (3.12), (3.13))

1. Найти единичную переходную функцию $h_0(t)$ для укороченного уравнения (3.20):

$$a_n h_0^{(n)} + a_{n-1} h_0^{(n-1)} + \dots + a_0 h_0 = 1, \quad h_0(0) = 0, \dots, h_0^{(n-1)}(0) = 0.$$

2. Найти импульсную переходную функцию $K_0(t)$ для укороченного уравнения (3.20) по формуле $K_0(t) = \frac{dh_0(t)}{dt}$.

3. Найти импульсную переходную функцию $K(t)$ для уравнения (3.12) по формуле:

$$K(t) = b_m K_0^{(m)}(t) + b_{m-1} K_0^{(m-1)}(t) + \dots + b_0 K_0(t).$$

4. Определить вынужденное движение по формуле

$$x(t) = \int_0^t K(t-\xi) g(\xi) d\xi = \int_0^t K(\eta) g(t-\eta) d\eta.$$

З а м е ч а н и е 3.2.

1. Переходные функции могут применяться при решении линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [33].

2. Практическая значимость уравнений типа (3.12), а значит, и актуальность их рассмотрения продемонстрированы на примере В.2.

3. В п.4 алгоритма интеграл выбирается в той форме, которая приводит к более простым выкладкам.

Пример 3.25. Найти решение уравнения:

$$x'' - 3x' + 2x = g'(t) - g(t), \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad g(t) = e^{3t}K(t).$$

Решение. 1. Найдем единичную переходную функцию $h_0(t)$ для укороченного уравнения как решение задачи:

$$h_0'' - 3h_0' + 2h_0 = 1, \quad h_0(0) = h_0'(0) = 0.$$

а) общее решение однородного уравнения имеет вид

$$h_0(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t},$$

поскольку корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ характеристического уравнения $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ действительные и различные;

б) частное решение неоднородного уравнения: $h_{0\text{ч}}(t) = 1/2$ получается в результате подстановки в уравнение функции $h_{0\text{ч}}(t) = A$;

в) общее решение неоднородного уравнения:

$$h_0(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 1/2;$$

г) частное решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее заданным нулевым начальным условиям, получаем из системы:

$$h_0(0) = C_1 + C_2 + 1/2 = 0,$$

$$h_0'(0) = C_1 + 2C_2 = 0,$$

откуда $C_1 = -1$, $C_2 = 1/2$ и $h_0(t) = 1/2 e^{2t} - e^t + 1/2$.

2. Найдем импульсную переходную функцию $K_0(t)$ для укороченного уравнения:

$$K_0(t) = \frac{dh_0(t)}{dt} = e^{2t} - e^t.$$

3. Определяем импульсную переходную функцию $K(t)$ для исходного уравнения:

$$K(t) = K_0'(t) - K_0(t) = e^{2t}.$$

4. Решение уравнения находим по формуле

$$x(t) = \int_0^t e^{2\eta} e^{3(t-\eta)} f(t-\eta) d\eta = e^{3t} \int_0^t e^{-\eta} d\eta = -e^{3t} e^{-\eta} \Big|_0^t = e^{3t} - e^{2t}.$$

Пример 3.26. Решить уравнение:

$$x''' + 6x'' + 11x' + 6x = g''(t) + 5g'(t) + 6g(t)$$

с начальными условиями $x(0) = 1$, $x'(0) = -3$, $x''(0) = 9$ при $g(t) = f(t)$.

Решение. I. Найдем свободное движение как решение исходного уравнения при тех же начальных условиях и нулевом входном сигнале, то есть считая $g(t) = 0$:

а) характеристическое уравнение $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$ имеет различные действительные корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$;

б) общее решение однородного уравнения запишем в виде

$$x_0(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-3t},$$

в) используя начальные условия, составляем систему:

$$\begin{aligned} x_0(0) &= C_1 + C_2 + C_3 = 1, \\ x_0'(0) &= -C_1 - 2C_2 - 3C_3 = -3, \\ x_0''(0) &= C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 9, \end{aligned}$$

из которой $C_1 = C_2 = 0$, $C_3 = 1$, поэтому $x_{0e}(t) = e^{-3t}$.

II. Находим вынужденное движение.

1. Определяем единичную переходную функцию $h_0(t)$ для укороченного уравнения как решение задачи:

$$h_0''' + 6h_0'' + 11h_0' + 6h_0 = 1, \quad h_0(0) = h_0'(0) = h_0''(0) = 0.$$

а) общее решение однородного уравнения имеет вид (см. п.1):

$$h_0(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-3t}.$$

б) частное решение неоднородного уравнения: $h_{0*}(t) = 1/6$ получается в результате подстановки в уравнение функции $h_{0*}(t) = A$;

в) общее решение неоднородного уравнения:

$$h_0(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-3t} + 1/6;$$

г) частное решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее нулевым начальным условиям, получаем из системы

$$\begin{aligned} h_0(0) &= C_1 + C_2 + C_3 + 1/6 = 0, \\ h_0'(0) &= -C_1 - 2C_2 - 3C_3 = 0, \\ h_0''(0) &= C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 0, \end{aligned}$$

откуда $C_1 = -1/2$, $C_2 = 1/2$, $C_3 = -1/6$ и $h_0(t) = -1/2 e^{-t} + 1/2 e^{-2t} - 1/6 e^{-3t} + 1/6$.

2. Найдем импульсную переходную функцию $K_0(t)$ для укороченного уравнения:

$$K_0(t) = \frac{dh_0(t)}{dt} = \frac{1}{2} e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-3t}.$$

3. Найдем импульсную переходную функцию $K(t)$ для исходного уравнения:

$$K(t) = K_0''(t) + 5K_0'(t) + 6K_0(t) = \frac{1}{2} e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{9}{2} e^{-3t} - \frac{5}{2} e^{-t} + 10e^{-2t} - 1\frac{1}{2} e^{-3t} + 3e^{-t} - 6e^{-2t} + 3e^{-3t} = e^{-t}.$$

4. Искомое вынужденное движение находим по формуле:

$$x_{\text{вын}}(t) = \int_0^t e^{-\eta} K(t-\eta) d\eta = -e^{-\eta} \Big|_0^t = 1 - e^{-t}.$$

III. Решение уравнения определяем как сумму свободного и вынужденного движений: $x(t) = x_{\text{св}}(t) + x_{\text{вын}}(t) = e^{-3t} + 1 - e^{-t}$.

3.2. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка с переменными коэффициентами

3.2.1. Уравнение Эйлера

Напомним, что все свойства решений линейных дифференциальных уравнений n -го порядка, сформулированные в разд.1.2 (теоремы 1.3-1.5), имеют место не только для рассмотренных в разд.3.1 уравнений с постоянными коэффициентами, но и для уравнений с переменными коэффициентами. Но в отличие от уравнений с постоянными коэффициентами общего метода нахождения решения линейного дифференциального уравнения n -го порядка с переменными коэффициентами не существует. Однако известны некоторые специальные методы, позволяющие в ряде случаев упростить заданное уравнение и получить окончательное решение. Одним из таких методов является метод замены переменных, который позволяет в ряде случаев свести задачу решения уравнения с переменными коэффициентами к задаче решения уравнения с постоянными коэффициентами. В частности, этот метод применяется для решения одного важного класса уравнений - линейного уравнения (1.2.2) n -го порядка, коэффициенты $a_k(t)$ которого имеют специальный вид $a_k(t) = a_k t^k$, $a_k = \text{const}$, $k = 0, 1, \dots, n$, то есть уравнения с переменными коэффициентами вида

$$a_n t^n x^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 t x' + a_0 x = f(t). \quad (3.21)$$

Уравнение (3.21) называется *уравнением Эйлера*.

Покажем, что уравнение Эйлера заменой независимой переменной t приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами и, следовательно, может быть решено изложенными в разд.3.1.1 методами. Для опре-

деленности будем считать, что $t > 0$ и обозначим $t = e^\tau$ ($\tau = \ln t$). Нетрудно убедиться, что при $t < 0$ замена $t = -e^\tau$ приведет к тому же выводу.

В соответствии с теоремой 1.5 для нахождения общего решения уравнения (3.21) достаточно найти любое его частное решение и общее решение соответствующего ему однородного уравнения. Рассмотрим вначале однородное уравнение Эйлера

$$a_n t^n x^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 t x' + a_0 x = 0. \quad (3.22)$$

Для перехода в (3.22) к новой переменной τ необходимо учесть, что неизвестная функция $x(t)$ является сложной функцией: $x(t) = x(t(\tau))$, и выполнить дифференцирование по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{1}{t} = \frac{dx}{d\tau} e^{-\tau}; \\ x'' &= \frac{d}{dt} x' = \frac{dx'}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx}{d\tau} e^{-\tau} \right) \frac{d\tau}{dt} = \left(\frac{d^2 x}{d\tau^2} e^{-\tau} - \frac{dx}{d\tau} e^{-\tau} \right) e^{-\tau} = \left(\frac{d^2 x}{d\tau^2} - \frac{dx}{d\tau} \right) e^{-2\tau}; \\ &\dots \\ x^{(n)} &= \frac{d}{dt} x^{(n-1)} = \left(\frac{d^n x}{d\tau^n} + b_{n-1}^{(n)} \frac{d^{n-1} x}{d\tau^{n-1}} + \dots + b_1^{(n)} \frac{dx}{d\tau} \right) e^{-n\tau}, \end{aligned}$$

где $b_1^{(n)}, b_2^{(n)}, \dots, b_{n-1}^{(n)}$ - некоторые постоянные (верхний индекс (n) указывает на их зависимость от порядка производной). Очевидно, что можно получить явные выражения для этих постоянных, однако на практике удобнее оказывается непосредственно выполнить дифференцирование, так как далее важно лишь то, что эти величины являются известными постоянными.

Подставим найденные выражения для $x', x'', \dots, x^{(n)}$ в уравнение (3.22), учитывая, что $t^k = e^{k\tau}$, $k = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} &a_n e^{n\tau} \left(\frac{d^n x}{d\tau^n} + b_{n-1}^{(n)} \frac{d^{n-1} x}{d\tau^{n-1}} + \dots + b_1^{(n)} \frac{dx}{d\tau} \right) e^{-n\tau} + \\ &+ a_{n-1} e^{(n-1)\tau} \left(\frac{d^{n-1} x}{d\tau^{n-1}} + b_{n-2}^{(n-1)} \frac{d^{n-2} x}{d\tau^{n-2}} + \dots + b_1^{(n-1)} \frac{dx}{d\tau} \right) e^{-(n-1)\tau} + \dots \\ &\dots + a_1 e^\tau \frac{dx}{d\tau} e^{-\tau} + a_0 x = 0, \end{aligned}$$

или, после преобразований:

$$\tilde{a}_n \frac{d^n x}{d\tau^n} + \tilde{a}_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{d\tau^{n-1}} + \dots + \tilde{a}_1 \frac{dx}{d\tau} + \tilde{a}_0 x = 0, \quad (3.23)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{a}_n &= a_n, \quad \tilde{a}_{n-1} = a_{n-1} + a_n b_1^{(n)}, \quad \tilde{a}_{n-2} = a_{n-2} + a_{n-1} b_1^{(n-1)} + a_n b_1^{(n)}, \dots, \\ \tilde{a}_1 &= a_1 + a_2 b_1^{(2)} + \dots + a_n b_1^{(n)}, \quad \tilde{a}_0 = a_0.\end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что уравнение (3.23) - уравнение с постоянными коэффициентами.

Таким образом, однородное уравнение Эйлера (3.22) подстановкой $t = e^\tau$ приводится к линейному дифференциальному уравнению (3.23) с постоянными коэффициентами. Далее, следуя правилам 3.1-3.4, необходимо найти частные решения уравнения (3.23), образующие фундаментальную систему решений. Для того чтобы получить фундаментальную систему решений для уравнения (3.22), останется выполнить обратную замену $\tau = \ln t$. При этом фундаментальная система решений уравнения (3.23) перейдет в фундаментальную систему решений уравнения (3.22). Тем самым устанавливается разрешимость уравнения (3.22) и указывается схема его решения, которая заключается в следующем. В уравнении (3.22) делается замена независимой переменной $t = e^\tau$, записывается уравнение (3.23), для которого составляется соответствующее характеристическое уравнение

$$\tilde{a}_n \lambda^n + \tilde{a}_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \tilde{a}_1 \lambda + \tilde{a}_0 = 0. \quad (3.24)$$

По корням $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения (3.24) в соответствии с правилами 3.1-3.4 выписывается фундаментальная система решений и общее решение уравнения (3.23) записывается в виде линейной комбинации найденных фундаментальных решений. Решение уравнения (3.22) записывается после применения обратной подстановки $\tau = \ln t$.

Заметим, что фундаментальную систему решений уравнения Эйлера (3.22) можно получить, не определяя фундаментальной системы решений уравнения (3.23) и даже не выписывая этого вспомогательного уравнения. Действительно, как показано в разд.3.1.1.1, характеристическое уравнение (3.24) для уравнения (3.23) получается в результате подстановки $x = e^\lambda t$ в (3.23). С учетом замены $t = e^\tau$ проводимой для решения однородного уравнения Эйлера (3.22), получаем, что характеристическое уравнение (3.24) можно получить непосредственно из (3.22) заменой $x = (e^\tau)^\lambda$, то есть $x = t^\lambda$. Подставим $x = t^\lambda$, $x' = \lambda t^{\lambda-1}$, ..., $x^{(n)} = \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-(n-1)) t^{\lambda-n}$ в (3.22). Проводя преобразования, получаем уравнение n -го порядка относительно λ :

$$a_n \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-(n-1)) + a_{n-1} \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-(n-2)) + \dots + a_0 = 0. \quad (3.25)$$

Уравнение (3.25) является характеристическим уравнением для (3.23) и, следовательно, по его корням записывается фундаментальная система решений $x_1(t), \dots, x_n(t)$ уравнения (3.23), а ей в силу равенства $\tau = \ln t$ соответствует фундаментальная система решений уравнения (3.22) $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Поскольку для записи уравнения (3.25) используются непосредственно только коэффициенты уравнения (3.22), то рассматривать вспомогательные уравнения (3.23), (3.24) нет необходимости. Общее решение уравнения (3.22) записывается в виде линейной комбинации:

$$x_0(t, C_1, \dots, C_n) = C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t).$$

С учетом проделанных рассуждений запишем для уравнения Эйлера правила 3.1-3.4 из разд.3.1.1.1.

П р а в и л о 3.1. * (Корни характеристического уравнения действительные, различные). Если все корни характеристического уравнения (3.25)-различные действительные числа, то есть $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$, то соответствующие им частные решения $x_1(\tau) = e^{\lambda_1 \tau}$, $x_2(\tau) = e^{\lambda_2 \tau}$, ..., $x_n(\tau) = e^{\lambda_n \tau}$ уравнения (3.23) образуют фундаментальную систему решений. Выполняя замену $\tau = \ln t$ и учитывая равенство $e^{\lambda \ln t} = t^\lambda$, получаем частные решения, образующие фундаментальную систему решений уравнения (3.22):

$$x_1(t) = t^{\lambda_1}, \quad x_2(t) = t^{\lambda_2}, \quad \dots, \quad x_n(t) = t^{\lambda_n}.$$

П р а в и л о 3.2. * (Корни характеристического уравнения комплексные, различные). Если среди корней характеристического уравнения есть комплексный корень $\lambda = \alpha + i\beta$, а значит, и сопряженный ему корень $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$, то этой паре $\alpha \pm i\beta$ корней соответствуют два линейно независимых частных решения $x_1(\tau) = e^{\alpha \tau} \cos \beta \tau$, $x_2(\tau) = e^{\alpha \tau} \sin \beta \tau$ уравнения (3.23). Выполняя замену $\tau = \ln t$ и учитывая равенство $e^{\alpha \ln t} = t^\alpha$, получаем два линейно независимых частных решения уравнения (3.22):

$$x_1(t) = t^\alpha \cos(\ln t^\beta), \quad x_2(t) = t^\alpha \sin(\ln t^\beta).$$

П р а в и л о 3.3. * (Корни характеристического уравнения действительные, кратные). Если среди корней характеристического уравнения есть равные действительные числа $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k$, то корню λ_1 кратности k соответствуют k линейно независимых частных решения $x_1(\tau) = e^{\lambda_1 \tau}$, $x_2(\tau) = \tau e^{\lambda_1 \tau}$, ..., $x_k(\tau) = \tau^{k-1} e^{\lambda_1 \tau}$ уравнения (3.23). Выполняя замену $\tau = \ln t$ и учитывая равенство $e^{\alpha \ln t} = t^\alpha$, получаем соответствующие частные решения, входящие в фундаментальную систему решений уравнения (3.22):

$$x_1(t) = t^{\lambda_1}, \quad x_2(t) = t^{\lambda_1} \ln t, \quad \dots, \quad x_k(t) = t^{\lambda_1} (\ln t)^{k-1}.$$

П р а в и л о 3.4. * (Корни характеристического уравнения комплексные, кратные). Если среди корней характеристического уравнения есть комплексный корень $\lambda = \alpha + i\beta$ кратности k , а значит, и сопряженный ему корень $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ той же кратности, то этой паре $\alpha \pm i\beta$ корней соответствуют $2k$ линейно независимых частных решений уравнения (3.23):

$$x_1(\tau) = e^{\alpha \tau} \cos \beta \tau, \quad x_2(\tau) = \tau e^{\alpha \tau} \cos \beta \tau, \quad \dots, \quad x_k(\tau) = \tau^{k-1} e^{\alpha \tau} \cos \beta \tau, \\ x_{k+1}(\tau) = e^{\alpha \tau} \sin \beta \tau, \quad x_{k+2}(\tau) = \tau e^{\alpha \tau} \sin \beta \tau, \quad \dots, \quad x_{2k}(\tau) = \tau^{k-1} e^{\alpha \tau} \sin \beta \tau.$$

Выполняя замену $\tau = \ln t$ и учитывая равенство $e^{\alpha \ln t} = t^\alpha$, получаем $2k$ линейно независимых частных решения уравнения (3.22):

$$x_1(t) = t^\alpha \cos(\ln t^\beta), \quad x_2(t) = t^\alpha \ln t \cos(\ln t^\beta),$$

$$x_k(t) = t^\alpha (\ln t)^{k-1} \cos(\ln t^\beta),$$

$$x_{k+1}(t) = t^\alpha \sin(\ln t^\beta), \quad x_{k+2}(t) = t^\alpha \ln t \sin(\ln t^\beta),$$

...

$$x_{2k}(t) = t^\alpha (\ln t)^{k-1} \sin(\ln t^\beta).$$

Сформулированные правила позволяют записать следующий алгоритм.

Алгоритм нахождения общего решения однородного уравнения Эйлера

1. Записать характеристическое уравнение (3.25).
2. Найти корни характеристического уравнения.
3. Пользуясь правилами 3.1°-3.4°, записать фундаментальную систему решений уравнения (3.22) в зависимости от типа корней.
4. Пользуясь теоремой 1.4, записать общее решение в виде линейной комбинации найденных фундаментальных решений.

Пример 3.27. Найти общие решения уравнений:

а) $t^3 x''' + tx' - x = 0$;

б) $t^3 x''' + t^2 x'' - 6tx' + 6x = 0$;

в) $2t^3 x''' + 5t^2 x'' + 9tx' - 4x = 0$.

Решение. Заметим, что заданные уравнения являются однородными уравнениями Эйлера порядка $n = 3$. Решим их, следуя шагам алгоритма.

1,2. Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

а) уравнение (3.25) имеет вид $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda - 1 = 0$ или после вынесения общего множителя $(\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$. Полученное уравнение можно представить в виде $(\lambda-1)^3 = 0$, поэтому корень $\lambda = 1$ имеет кратность 3;

б) уравнение (3.25) имеет вид $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda(\lambda-1) - 6\lambda + 6 = 0$ или после раскрытия скобок $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Полученное уравнение можно представить в виде $(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3) = 0$, поэтому корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$;

в) уравнение (3.25) имеет вид $2\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + 5\lambda(\lambda-1) + 9\lambda - 4 = 0$ или после раскрытия скобок $2\lambda^3 - \lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$. Полученное уравнение можно представить в виде $(2\lambda-1)(\lambda^2 + 4) = 0$, поэтому корни $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_{2,3} = \pm 2i$.

3,4. Следуя правилам 3.1°-3.4°, запишем для заданных уравнений фундаментальные системы решений и общие решения:

а) согласно правилу 3.3° фундаментальную систему решений образуют функции $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t \ln t$, $x_3(t) = t (\ln t)^2$. Общее решение уравнения:

$$x(t) = C_1 t + C_2 t \ln t + C_3 t (\ln t)^2;$$

б) согласно правилу 3.1° фундаментальную систему решений образуют функции $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^{-2}$, $x_3(t) = t^3$. Общее решение уравнения:

$$x(t) = C_1 t + C_2 t^{-2} + C_3 t^3;$$

в) согласно правилам 3.1* и 3.2* фундаментальную систему решений образуют функции $x_1(t) = t^{1/2}$, $x_2(t) = \cos(\ln t^2)$, $x_3(t) = \sin(\ln t^2)$. Общее решение уравнения:

$$x(t) = C_1 t^{1/2} + C_2 \cos(\ln t^2) + C_3 \sin(\ln t^2).$$

Обращаясь к задаче нахождения частного решения неоднородного уравнения Эйлера (3.21), заметим, что заменой $t = e^\tau$ оно приводится к неоднородному линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\tilde{a}_n \frac{d^n x}{d\tau^n} + \tilde{a}_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{d\tau^{n-1}} + \dots + \tilde{a}_1 \frac{dx}{d\tau} + \tilde{a}_0 x = F(\tau),$$

где $F(\tau) = f(e^\tau) = f(t)$, а коэффициенты $\tilde{a}_k$ совпадают с коэффициентами уравнения (3.23), то есть (3.23) - однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному.

Таким образом, для решения неоднородного уравнения Эйлера используются те же методы, что и для уравнения с постоянными коэффициентами. При этом метод вариации произвольных постоянных используется в точности как и в разд. 3.1.2.2, а в методе подбора частного решения надо учесть замену $t = e^\tau$ в определении функции специального вида.

Для уравнения Эйлера (3.21) функция специального вида представляется следующим образом:

$$f(t) = [R_q(\ln t) \cos(\ln t^\beta) + P_l(\ln t) \sin(\ln t^\beta)] t^\alpha, \quad (3.26)$$

где $R_q(\tau)$, $P_l(\tau)$ - многочлены переменной $\tau = \ln t$ степени q и l соответственно; α , β - заданные числа.

Модифицированное правило 3.5 имеет следующий вид.

П р а в и л о 3.5*. Метод подбора для уравнения Эйлера состоит в следующем: если правая часть уравнения (3.21) имеет вид (3.26), то частное решение уравнения подбирается в виде

$$x_s(t) = t^\alpha [Q_m(\ln t) \cos(\ln t^\beta) + T_m(\ln t) \sin(\ln t^\beta)] (\ln t)^s, \quad (3.27)$$

где $m = \max(q, l)$; $Q_m(\tau)$, $T_m(\tau)$ - многочлены переменной $\tau = \ln t$ степени m с неопределенными коэффициентами; натуральное число s определяется следующим образом:

$$s = \begin{cases} 0, & \text{если число } (\alpha + i\beta) \text{ не совпадает ни с одним} \\ & \text{из корней характеристического уравнения,} \\ k, & \text{если число } (\alpha + i\beta) \text{ совпадает с корнем кратности } k. \end{cases}$$

Алгоритм нахождения частного решения уравнения Эйлера методом подбора

1. Определить параметры α , β , q , l правой части - функции $f(t)$.

2. Выписать структуру частного решения с неопределенными коэффициентами в виде (3.27).

3. Подставить полученное выражение для $x_0(t)$ в уравнение (3.21) и найти значения неопределенных коэффициентов, приравняв выражения при одинаковых функциях переменной t (метод неопределенных коэффициентов).

Пример 3.28. Найти частное решение уравнения

$$t^2 x'' - 2x = \sin(\ln t) + 2t^2.$$

Решение. Заданное уравнение является неоднородным уравнением Эйлера.

А. Решим сначала соответствующее однородное уравнение, следуя шагам алгоритма.

1. Запишем характеристическое уравнение (3.25): $\lambda(\lambda - 1) - 2 = 0$, или после раскрытия скобок $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.

2. Корни полученного характеристического уравнения: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.

3. Согласно правилу 3.1 * фундаментальную систему решений данного уравнения образуют функции $x_1(t) = t^2$, $x_2(t) = t^{-1}$.

4. Общее решение однородного уравнения:

$$x_0(t) = C_1 t^2 + C_2 \frac{1}{t}.$$

Б. Найдем частное решение неоднородного уравнения. Для этого воспользуемся замечанием 1.4 и представим правую часть уравнения в виде суммы двух функций: $f_1(t) = \sin(\ln t)$, $f_2(t) = 2t^2$. Каждая из этих функций является функцией специального вида (3.26), поэтому частное решение для каждого случая найдем методом подбора, следуя шагам алгоритма.

1. Определим параметры правых частей:

а) для правой части $f_1(t) = \sin(\ln t)$ определяем параметры в соответствии с (3.26): $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $q = 0$, так как $R_q(\ln t) = 0$; $l = 0$, поскольку $P_l(t) = 1$;

б) для правой части $f_2(t) = 2t^2$ определяем параметры в соответствии с (3.26): $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $q = 0$, так как $R_q(\ln t) = 2$; $l = 0$, поскольку $P_l(t) = 0$.

2. Учитывая, что корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, получаем:

а) для $f_1(t)$ параметры $s = 0$, $m = 0$, и, значит, соответствующее частное решение подбирается (согласно (3.27)) в виде

$$x_{01}(t) = A \cos(\ln t) + B \sin(\ln t);$$

б) для $f_2(t)$ параметры $s = 1$, $m = 0$, и, значит, соответствующее частное решение подбирается (согласно (3.27)) в виде

$$x_{02}(t) = C t^2 \ln t.$$

3. Для $i = 1, 2$ последовательно подставляем искомые частные решения $x_{0i}(t)$ в уравнения $t^2 x'' - 2x = f_i(t)$ и находим неизвестные параметры A , B , C :

а) для $x_{01}(t) = A \cos(\ln t) + B \sin(\ln t)$ имеем

$$\begin{aligned}
 x_{q1}'(t) &= \frac{-A \sin(\ln t) + B \cos(\ln t)}{t}; \\
 x_{q1}''(t) &= \frac{-A \cos(\ln t) - B \sin(\ln t)}{t^2} - \frac{(-A \sin(\ln t) + B \cos(\ln t))}{t^2} = \\
 &= \frac{-(A+B) \cos(\ln t) + (A-B) \sin(\ln t)}{t^2}.
 \end{aligned}$$

Подставляя выражение для $x_{q1}(t)$ и производной $x_{q1}''(t)$ в соответствующее уравнение, получаем

$$t^2 \frac{-(A+B) \cos(\ln t) + (A-B) \sin(\ln t)}{t^2} - 2(A \cos(\ln t) + B \sin(\ln t)) = \sin(\ln t),$$

или

$$-(A+B) \cos(\ln t) + (A-B) \sin(\ln t) - 2A \cos(\ln t) - 2B \sin(\ln t) = \sin(\ln t).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях переменной t , получаем $-A-B-2A=0$, $A-B-2B=1$. Отсюда $A=1/10$, $B=-3/10$ и

$$x_{q1}(t) = 1/10 \cos(\ln t) - 3/10 \sin(\ln t);$$

б) для $x_{q2}(t) = C t^2 \ln t$ имеем

$$x_{q2}'(t) = 2Ct \ln t + Ct, \quad x_{q2}''(t) = 2C \ln t + 3C.$$

Подставляя выражение для $x_{q2}(t)$ и производной $x_{q2}''(t)$ в соответствующее уравнение, получаем $t^2(2C \ln t + 3C) - 2Ct^2 \ln t = 2t^2$, или $3Ct^2 = 2t^2$.

Отсюда $C=2/3$ и $x_{q2}(t) = 2/3 t^2 \ln t$.

Искомое частное решение записываем в виде $x_q(t) = x_{q1}(t) + x_{q2}(t)$, то есть

$$x_q(t) = 1/10 \cos(\ln t) - 3/10 \sin(\ln t) + 2/3 t^2 \ln t.$$

В заключение приведем примеры нахождения общего решения неоднородного уравнения Эйлера и решения задачи Коши (см. алгоритм из разд. 3.1.2.3).

Пример 3.29. Решить уравнение:

$$t^2 x'' - 3tx' + 5x = -5t^3 + (\ln t)^2.$$

Решение. Заданное уравнение является неоднородным уравнением Эйлера. Решим сначала соответствующее однородное уравнение, следуя шагам алгоритма.

1. Записываем характеристическое уравнение: $\lambda(\lambda-1) - 3\lambda + 5 = 0$, или после раскрытия скобок $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$.

2. Корни полученного характеристического уравнения: $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$.

3. Согласно правилу 3.2 * фундаментальную систему решений данного уравнения образуют функции $x_1(t) = t^2 \cos(\ln t)$, $x_2(t) = t^2 \sin(\ln t)$.

4. Общее решение однородного уравнения:

$$x_0(t) = C_1 t^2 \cos(\ln t) + C_2 t^2 \sin(\ln t).$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения. Для этого воспользуемся замечанием 1.4 и представим правую часть уравнения в виде суммы двух функций: $f_1(t) = -5t^3$, $f_2(t) = (\ln t)^2$. Каждая из этих функций является функцией специального вида (3.26), поэтому частное решение для каждого случая найдем методом подбора, следуя шагам алгоритма.

1. Определим параметры правых частей:

а) для правой части $f_1(t) = -5t^3$ определяем параметры в соответствии с (3.26): $\alpha = 3$, $\beta = 0$, $q = 0$, так как $R_q(\ln t) = -5$; $t = 0$, поскольку $P_t(t) = 0$;

б) для правой части $f_2(t) = (\ln t)^2$ определяем параметры в соответствии с (3.26): $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $q = 2$, так как $R_q(\ln t) = (\ln t)^2$; $t = 0$, поскольку $P_t(t) = 0$.

2. Учитывая, что корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$, получаем:

а) для $f_1(t)$ параметры $s = 0$, $m = 0$, и, значит, соответствующее частное решение подбирается (согласно (3.27)) в виде $x_{q1}(t) = At^3$;

б) для $f_2(t)$ параметры $s = 0$, $m = 2$, и, значит, соответствующее частное решение подбирается (согласно (3.27)) в виде $x_{q2}(t) = B(\ln t)^2 + C \ln t + D$.

3. Для $i = 1, 2$ последовательно подставляем искомые частные решения $x_{qi}(t)$ в уравнения $t^2 x'' - 3tx' + 5x = f_i(t)$ и находим коэффициенты A, B, C, D :

а) для $x_{q1}(t) = At^3$ имеем $x_{q1}'(t) = 3At^2$, $x_{q1}''(t) = 6At$.

Подставляя выражение для $x_{q1}(t)$ и производных в соответствующее уравнение, получаем $t^2 6At - 3t 3At^2 + 5At^3 = -5t^3$, или $2A = -5$. Отсюда $A = -\frac{5}{2}$ и $x_{q1}(t) = -\frac{5}{2}t^3$;

б) для $x_{q2}(t) = B(\ln t)^2 + C \ln t + D$ имеем

$$x_{q2}'(t) = \frac{2B \ln t}{t} + \frac{C}{t}, \quad x_{q2}''(t) = \frac{2B - 2B \ln t}{t^2} - \frac{C}{t^2}.$$

Подставляя выражение для $x_{q2}(t)$ и производных в соответствующее уравнение, получаем

$$t^2 \left(\frac{2B - 2B \ln t}{t^2} - \frac{C}{t^2} \right) - 3t \left(\frac{2B \ln t}{t} + \frac{C}{t} \right) + 5B(\ln t)^2 + 5C \ln t + 5D = (\ln t)^2,$$

или

$$2B - 2B \ln t - C - 6B \ln t - 3C + 5B(\ln t)^2 + 5C \ln t + 5D = (\ln t)^2.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях переменной t , получаем $2B - 4C + 5D = 0$, $-8B + 5C = 0$, $5B = 1$. Отсюда $B = \frac{1}{5}$, $C = \frac{8}{25}$, $D = \frac{22}{125}$ и $x_{q2}(t) = \frac{1}{5}(\ln t)^2 + \frac{8}{25} \ln t + \frac{22}{125}$.

Общее решение исходного уравнения согласно теореме 1.5 записываем в виде $x(t) = x_0(t) + x_{\pi 1}(t) + x_{\pi 2}(t)$, то есть

$$x(t) = C_1 t^2 \cos(\ln t) + C_2 t^2 \sin(\ln t) - \frac{5}{2} t^3 + \frac{1}{5} (\ln t)^2 + \frac{9}{25} \ln t + \frac{22}{125}.$$

Пример 3.30. Решить задачу Коши:

$$t^2 x'' - 2tx' + 2x = t^3 \cos t, \quad x(\pi) = \pi^2, \quad x'(\pi) = \pi.$$

Решение. Заданное уравнение является неоднородным уравнением Эйлера. Решим сначала соответствующее однородное уравнение, следуя шагам алгоритма.

1. Записываем характеристическое уравнение: $\lambda(\lambda - 1) - 2\lambda + 2 = 0$, или после раскрытия скобок $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$.

2. Корни полученного характеристического уравнения: $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$.

3. Согласно правилу 3.1 * фундаментальную систему решений данного уравнения образуют функции $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$.

4. Общее решение однородного уравнения $x_0(t) = C_1 t + C_2 t^2$.

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных, поскольку его правая часть не может быть представлена в виде (3.26). Воспользуемся алгоритмом из разд.3.1.2.2.

1,2. Учитывая, что найдено общее решение однородного уравнения, будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$x_{\pi}(t) = C_1(t) t + C_2(t) t^2.$$

3. Записываем систему (3.10), учитывая что в рассматриваемом примере $n = 2$ и $a_n = a_n(t) = t^2$:

$$\begin{cases} C_1'(t) t + C_2'(t) t^2 = 0, \\ C_1'(t) + 2C_2'(t) t = \frac{t^3 \cos t}{t^2}. \end{cases}$$

Умножая второе уравнение системы на t и вычитая из него первое, получаем $C_2'(t) = \cos t$. Отсюда $C_2(t) = \sin t$. Из первого уравнения следует, что $C_1'(t) = -C_2'(t) t$, то есть $C_1'(t) = -t \cos t$. Отсюда

$$C_1(t) = - \int t \cos t dt = -\cos t - t \sin t.$$

Таким образом, найдено частное решение

$$x_{\pi}(t) = -t \cos t - t^2 \sin t + t^2 \sin t = -t \cos t.$$

Общее решение заданного уравнения:

$$x(t) = C_1 t + C_2 t^2 - t \cos t.$$

Постоянные C_1 и C_2 находим, используя начальные условия, из системы

$$\begin{aligned} C_1 \pi + C_2 \pi^2 + \pi &= \pi^2, \\ C_1 + 2C_2 \pi + 1 &= \pi. \end{aligned}$$

Умножая второе уравнение на π и вычитая из него первое, находим $C_2 = 0$. Тогда $C_1 = \pi - 1$. Искомое решение задачи Коши имеет вид

$$x(t) = (\pi - 1)t - t \cos t.$$

3.2.2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

Другой метод решения линейного уравнения с переменными коэффициентами рассмотрим для линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка:

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t). \quad (3.28)$$

Функции $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ будем предполагать непрерывными на некотором заданном промежутке. Тогда уравнение не имеет особых решений и, согласно теореме 1.1, задача Коши для него имеет на заданном промежутке единственное решение при любых начальных условиях.

Заметим, что задачи, рассмотренные в примерах В.3-В.5, привели именно к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. Это объясняется тем, что многие физические законы формулируются для второй производной переменной величины и приводят, таким образом, к уравнениям второго порядка. Этот факт указывает на особую важность уравнений второго порядка.

Как и выше (см. разд. 3.2.1), наряду с неоднородным уравнением (3.28) рассмотрим соответствующее ему однородное уравнение

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0. \quad (3.29)$$

Как известно, для решения неоднородного уравнения (3.28) достаточно найти общее решение однородного уравнения (3.29) и воспользоваться методом вариации произвольных постоянных.

Общее решение однородного уравнения (3.29) может быть записано по двум его линейно независимым частным решениям. Излагаемый далее метод решения уравнений (3.28), (3.29) основан на предположении, что одно частное решение уравнения (3.29) известно. Возможность нахождения в таком случае второго частного решения, линейно независимого с заданным, обосновывается следующим утверждением.

ТЕОРЕМА 3.2 (Формула Остроградского-Лиувилля) [44].

Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ - два частных решения уравнения (3.29). Тогда имеет место формула Остроградского-Лиувилля:

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = C e^{-\int a(t) dt}, \quad (3.30)$$

где C - произвольная постоянная.

Поскольку в левой части (3.30) стоит определитель Вронского $W[x_1(t), x_2(t)]$, то из этого равенства следует (при $C \neq 0$), что решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ линейно независимы.

Полагая, что $C = C_1$, $x_1 = u(t)$ - известная функция, а $x_2 = x(t)$ - неизвестная функция, из равенства

$$\begin{vmatrix} u(t) & x(t) \\ u'(t) & x'(t) \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int a(t) dt}$$

получаем, раскрывая определитель, уравнение

$$u(t) x'(t) - u'(t) x(t) = C_1 e^{-\int a(t) dt}. \quad (3.31)$$

Уравнение (3.31) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка относительно искомой функции $x(t)$. Методы решения такого уравнения, в частности метод Лагранжа, подробно рассмотрены в разд. 2.3.

Если в уравнении (3.31) считать константу C_1 фиксированной (например, $C_1 = 1$) и ограничиться нахождением только одного частного решения $x(t) = x_2(t)$, то тем самым будут получены два линейно независимых частных решения, а их линейная комбинация $C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ определит общее решение уравнения (3.29).

Если считать C_1 произвольной постоянной и для уравнения (3.31) записать общее решение, то есть решение, содержащее произвольную постоянную, которую следует обозначить C_2 , то в результате будет получено решение, содержащее две произвольные постоянные C_1 и C_2 . В этом случае получится совокупность $x = x(t, C_1, C_2)$, являющаяся общим решением уравнения (3.29). Итак, получаем следующий алгоритм.

Алгоритмы решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

1. Подобрать частное решение $u(t)$ заданного уравнения (3.29).
2. Для найденной функции $u(t)$ и заданного уравнения второго порядка составить уравнение (3.31) первого порядка, содержащее произвольную постоянную C_1 .
3. Решить уравнение (3.31) методом Лагранжа, следуя шагам алгоритма из разд. 2.3.1, включив в запись общего решения постоянную C_2 .

Пример 3.31. Решить уравнение

$$x'' - \frac{2t}{t^2 + 1} x' + \frac{2}{t^2 + 1} x = 0.$$

Решение. 1. Частное решение в данном примере легко угадывается: $u(t) = t$.

2. Уравнение (3.31) с учетом того, что

$$u'(t) = 1, \quad a(t) = -\frac{2t}{t^2 + 1}, \quad e^{-\int a(t) dt} = e^{\int \frac{2t}{t^2 + 1} dt} = e^{\ln(t^2 + 1)} = t^2 + 1$$

принимает вид $tx' - x = C_1(t^2 + 1)$.

3. Решаем полученное уравнение методом Лагранжа:

а) соответствующее однородное уравнение: $tx' - x = 0$;

б) разделяя переменные: $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t}$, получаем общее решение однородного уравнения $x_0(t) = C_2 t$;

в) общее решение неоднородного уравнения ищется в виде $x(t) = C_2(t)t$;

г) подставляя $x(t) = C_2(t)t$ в неоднородное уравнение и учитывая, что $x'(t) = C_2'(t)t + C_2(t)$, получаем $tC_2'(t)t + tC_2(t) - C_2(t)t = C_1(t^2 + 1)$, или после упрощения: $C_2'(t) = C_1 \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$. Отсюда $C_2(t) = \int C_1 \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = C_1 t - \frac{C_1}{t} + C_2$ и, окончательно получаем

$$x(t) = C_1 t^2 - C_1 + C_2 t = C_1 (t^2 - 1) + C_2 t.$$

Пример 3.32. Решить уравнение:

$$(2t+1)x'' + 4tx' - 4x = 0.$$

Решение. Данное уравнение сначала следует привести к виду (3.28), чтобы определить коэффициент $\alpha(t)$. Для этого разделим обе его части (при $t \neq -1/2$) на $(2t+1)$: $x'' + \frac{4t}{2t+1}x' - \frac{4}{2t+1}x = 0$.

1. Как и в предыдущем примере, частное решение легко угадывается: $u(t) = t$.

2. Уравнение (3.31) с учетом того, что $u'(t) = 1$ и $\alpha(t) = \frac{4t}{2t+1} = 2 - \frac{2}{2t+1}$, $e^{-\int \alpha(t) dt} = e^{\int (\frac{2}{2t+1} - 2) dt} = e^{\ln|2t+1| - 2t} = (2t+1)e^{-2t}$ принимает вид

$$tx' - x = C_1(2t+1)e^{-2t}.$$

3. Решаем полученное уравнение методом Лагранжа:

а, б) соответствующее однородное уравнение $tx' - x = 0$ имеет общее решение $x_0(t) = C_2 t$;

в) общее решение неоднородного уравнения ищется в виде $x(t) = C_2(t)t$;

г) подставляя $x(t) = C_2(t)t$ в неоднородное уравнение и учитывая, что $x'(t) = C_2'(t)t + C_2(t)$, получаем

$$tC_2'(t)t + tC_2(t) - C_2(t)t = C_1(2t+1)e^{-2t},$$

или, после упрощения, $C_2'(t) = C_1 \frac{2t+1}{t^2} e^{-2t}$.

Отсюда $C_2(t) = \int C_1 \frac{2t+1}{t^2} e^{-2t} dt$. При вычислении интеграла используем равенство

$$\left(\frac{e^{-2t}}{t}\right)' = \frac{-2te^{-2t} - e^{-2t}}{t^2} = -e^{-2t} \left(\frac{2t+1}{t^2}\right).$$

Таким образом, $C_2(t) = -C_1 \frac{e^{-2t}}{t} + C_2$ и $x(t) = -C_1 e^{-2t} + C_2 t$.

Итак, общее решение исходного уравнения $x(t) = C_2 t - C_1 e^{-2t}$.

Пример 3.33. Решить уравнения:

а) $(t^2 + 1)x'' - 2tx' + 2x = (t^2 + 1)^2$; б) $(2t + 1)x'' + 4tx' - 4x = (2t + 1)^2 e^{-2t}$.

Решение. а) Заметим, что, разделив обе части заданного уравнения на $(t^2 + 1)$, его можно переписать в виде $x'' - \frac{2t}{t^2 + 1}x' + \frac{2}{t^2 + 1}x = t^2 + 1$ и воспользоваться результатом примера 3.31 для нахождения общего решения соответствующего однородного уравнения.

б) Однородное уравнение, соответствующее заданному неоднородному, решено в примере 3.32.

Для решения заданных неоднородных уравнений найдем их частные решения, следуя шагам алгоритма из разд. 3.1.2.2.

1. а) Поскольку $x_0(t) = C_1(t^2 - 1) + C_2 t$, то фундаментальную систему решений образуют функции $x_1(t) = t^2 - 1$, $x_2(t) = t$.

б) Поскольку $x_0(t) = C_2 t - C_1 e^{-2t}$, то фундаментальную систему решений образуют функции $x_1(t) = -e^{-2t}$, $x_2(t) = t$.

2. Структура частного решения имеет вид

а) $x_p(t) = C_1(t)(t^2 - 1) + C_2(t)t$; б) $x_p(t) = -C_1(t)e^{-2t} + C_2(t)t$.

3. Система уравнений для нахождения $C_1(t)$ и $C_2(t)$ имеет вид

а) $\begin{cases} C_1'(t)(t^2 - 1) + C_2'(t)t = 0, \\ C_1'(t)2t + C_2'(t) = t^2 + 1, \end{cases}$ б) $\begin{cases} -C_1'(t)e^{-2t} + C_2'(t)t = 0, \\ 2C_1'(t)e^{-2t} + C_2'(t) = (2t + 1)e^{-2t}. \end{cases}$

Обратим внимание, что система в случае а) составляется не для исходного уравнения, а для уравнения, полученного из исходного после деления на $(t^2 + 1)$, а при составлении системы в случае б) в правой части второго уравнения учитывается, что в записи исходного уравнения коэффициент при старшей производной $a(t) = (2t + 1)$ (правая часть равна $f(t)/a(t)$).

Решим полученные системы:

а) умножая второе уравнение на t и вычитая из него первое, получаем

$$C_1'(t)(t^2 + 1) = t(t^2 + 1).$$

Отсюда $C_1'(t) = t$, или, после интегрирования, $C_1(t) = \frac{1}{2}t^2$. Из первого уравнения системы, получаем $C_2'(t) = \frac{C_1'(t)(1 - t^2)}{t} = 1 - t^2$, или, после интегрирования, $C_2(t) = t - \frac{1}{3}t^3$;

б) умножая первое уравнение на 2 и складывая его со вторым, получаем

$$C_2'(t)(2t + 1) = (2t + 1)e^{-2t}.$$

Отсюда $C_2'(t) = e^{-2t}$, или, после интегрирования, $C_2(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}$. Из первого уравнения системы получаем $C_1'(t) = C_2'(t) t e^{2t} = t$, или, после интегрирования, $C_1(t) = \frac{1}{2}t^2$.

4. Записываем найденные частные решения:

$$a) x_1(t) = C_1(t)(t^2 - 1) + C_2(t)t = \frac{1}{2}t^2(t^2 - 1) + (t - \frac{1}{2}t^3)t;$$

$$б) x_2(t) = C_2(t)t - C_1(t)e^{-2t} = -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{2}t^2e^{-2t} = -\frac{1}{2}e^{-2t}(t^2 + t).$$

Окончательно, получаем общие решения заданных уравнений:

$$a) x(t) = C_1(t^2 - 1) + C_2t + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{2}t^2;$$

$$б) x(t) = C_2t - C_1e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}(t^2 + t).$$

3.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Составить линейное дифференциальное уравнение по его фундаментальной системе решений:

$$a) e^t, te^t. \text{ Ответ: } x'' - 2x' + x = 0;$$

$$б) 1, t, t^2, t^3. \text{ Ответ: } x^{IV} = 0;$$

$$в) 1, t, \cos t, \sin t. \text{ Ответ: } x^{IV} + x'' = 0;$$

$$г) t, \cos t, \sin t. \text{ Ответ: } tx''' - x'' + tx' - x = 0;$$

$$д) t, t^2, t^3. \text{ Ответ: } t^3x''' - 3t^2x'' + 6tx' - 6x = 0.$$

Указание: Составить линейную комбинацию из n заданных решений (общее решение искомого уравнения), продифференцировать n раз полученное выражение и исключить постоянные C_i , $i = 1, \dots, n$.

2. Составить дифференциальное уравнение по его характеристическому уравнению:

$$a) \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0. \text{ Ответ: } x'' + 3x' + 2x = 0;$$

$$б) \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0. \text{ Ответ: } x''' + 3x'' + 2x' = 0;$$

$$в) \lambda^2 + 4 = 0. \text{ Ответ: } x'' + 4x = 0.$$

3. Зная корни характеристического уравнения линейного однородного дифференциального уравнения, написать его решение:

$$a) \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0, \lambda_{3,4} = 5. \text{ Ответ: } x(t) = C_1 + C_2e^{3t} + C_3e^{5t} + C_4te^{5t};$$

$$б) \lambda_{1,2} = 3 \pm 2i. \text{ Ответ: } x(t) = e^{3t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t);$$

$$в) \lambda_{1,2} = 2 \pm i, \lambda_{3,4} = -1 \pm 3i.$$

$$\text{Ответ: } x(t) = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-t}(C_3 \cos 3t + C_4 \sin 3t).$$

4. Образуют ли фундаментальную систему решений уравнения $x^{IV} - 16x = 0$ следующие функции:

$$a) x_1(t) = e^{2t}, x_2(t) = e^{-2t};$$

$$б) x_1(t) = e^{2t}, x_2(t) = te^{2t}, x_3(t) = t^2e^{2t}, x_4(t) = t^3e^{2t};$$

$$в) x_1(t) = e^{2t}, x_2(t) = te^{2t}, x_3(t) = e^{-2t}, x_4(t) = te^{-2t}.$$

Ответ: а), б), в) - нет. См. примечание.

5. Найти общее решение уравнения $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0$. Решить задачу Коши для этого уравнения и начальных условий $x(0) = -1$, $x'(0) = -3$, $x''(0) = -8$. Ответ: $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$, $x_0(t) = \frac{1}{2} e^t - e^{2t} - \frac{1}{2} e^{3t}$.

6. Для уравнения $x'' - x = te^t + e^{2t}$ найти:

а) частное решение методом подбора;

б) общее решение;

в) решение задачи Коши при начальных условиях $x(0) = \frac{1}{2}$, $x'(0) = \frac{5}{12}$;

г) решение задачи Коши при начальных условиях $x(0) = \frac{1}{4}$, $x'(0) = \frac{1}{2}$.

Ответ: а), в) $x_0(t) = \frac{1}{4}(t^2 - t)e^t + \frac{1}{3}e^{2t}$; б) $x_0(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + x_0(t)$;

г) $x(t) = \frac{1}{4}(t^2 - t)e^t + \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{12}e^{-t}$.

7. Найти частные решения уравнений:

а) $x'' + 2x' + 2x = e^{-t} \cos t$;

б) $x'' + 2x' + 2x = te^{-t}$;

в) $x'' + 2x' + 2x = e^{-t}(\cos t + t)$.

Ответ: а) $x_0(t) = \frac{1}{2} te^{-t} \sin t$; б) $x_0(t) = te^{-t}$; в) $x_0(t) = \frac{1}{2} te^{-t} \sin t + te^{-t}$.

8. Найти общее решение уравнения из задачи 7 п."в".

Ответ: $x(t) = C_1 e^{-t} \cos t + C_2 e^{-t} \sin t + \frac{1}{2} te^{-t} \sin t + te^{-t}$.

9. Найти частные решения уравнений:

а) $x'' + 2x' + x = e^{-t} \cos t$;

б) $x'' + 2x' + x = te^{-t}$;

в) $x'' + 2x' + x = e^{-t}(\cos t + t)$.

Ответ: а) $x_0(t) = -e^{-t} \cos t$; б) $x_0(t) = \frac{1}{6} t^3 e^{-t}$; в) $x_0(t) = \frac{1}{6} t^3 e^{-t} - e^{-t} \cos t$.

10. Найти общее решение уравнения из задачи 9 п."в".

Ответ: $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 te^{-t} + e^{-t}(\frac{1}{6} t^3 - \cos t)$.

11. Решить задачу Коши для уравнения из задачи 9 п."в" при начальных условиях $x(0) = 2$, $x'(0) = 1$.

Ответ: $x_0(t) = e^{-t}(3 + 3t + \frac{1}{6} t^3 - \cos t)$.

12. Для уравнения $x'' + x = 2 \sin t \sin 2t$ найти:

а) частное решение методом подбора;

б) общее решение;

в) решение задачи Коши при начальных условиях $x(0) = \frac{1}{8}$, $x'(0) = \frac{1}{2}$;

г) решение задачи Коши при начальных условиях $x(0) = \frac{1}{8}$, $x'(0) = 0$.

Ответ: а), г) $x_0(t) = \frac{1}{2} t \sin t + \frac{1}{8} \cos 3t$; б) $x_0(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + x_0(t)$;

в) $x(t) = \frac{1}{2}(t + 1) \sin t + \frac{1}{8} \cos 3t$.

13. Найти общее решение уравнения $x'' - x' = f(t)$, если

а) $f(t) = e^{2t} \sqrt{1 - e^{2t}}$; б) $f(t) = e^{2t} \cos e^t$.

Ответ: а) $x(t) = C_1 + C_2 e^t + \frac{(1 - e^{2t})^{3/2}}{3} + \frac{e^t}{2} \arcsin e^t + \frac{1}{2} e^{2t} \sqrt{1 - e^{2t}}$;

б) $x(t) = C_1 + C_2 e^t - \cos e^t$.

14. Найти какое-либо частное решение уравнения $x'' + x = f(t)$, если

$$a) f(t) = \frac{2e^t}{e^t - 1}; \quad б) f(t) = \frac{1}{\cos 2t \sqrt{\cos 2t}}.$$

Ответ: а) $x(t) = (e^t - e^{-t}) \ln(e^t - 1) - te^t - 1$; б) $x(t) = -\sqrt{\cos 2t}$.

15. Для уравнения $x'' - 6x' + 9x = \frac{9t^2 + 6t + 2}{t^3}$ найти:

а) общее решение;

б) решение задачи Коши при начальных условиях $x(1) = 1, x'(1) = -1$;

в) решение задачи Коши при начальных условиях $x(1) = 1, x'(1) = 0$.

Ответ: а) $x(t) = e^{3t}(C_1 + C_2t) + \frac{1}{t}$; б) $x(t) = \frac{1}{t}$; в) $x(t) = e^{3(t-1)}(t-1) + \frac{1}{t}$.

Примечания.

1. Решение задачи 1. По известной фундаментальной системе решений (совокупности из n линейно независимых решений) $x_1(t) = t, x_2(t) = \cos t, x_3(t) = \sin t$ нужно составить линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка. Согласно теореме 1.4 общее решение искомого уравнения представляет собой линейную комбинацию:

$$x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + C_3x_3(t),$$

то есть $x(t) = C_1t + C_2 \cos t + C_3 \sin t$. Продифференцируем $x(t)$ три раза:

$$x'(t) = C_1 - C_2 \sin t + C_3 \cos t, \quad x''(t) = -C_2 \cos t - C_3 \sin t,$$

$$x'''(t) = C_2 \sin t - C_3 \cos t.$$

Выразим постоянные C_1, C_2, C_3 из полученной системы. Из первого и последнего равенств находим: $C_1 = x' + x'''$, кроме того, второе равенство системы можно переписать в виде $C_2 \cos t + C_3 \sin t = -x''$. Подставляя полученные выражения в равенство для $x(t)$, получаем $x(t) = (x' + x''')t - x''$ или $tx''' - x'' + tx' - x = 0$ - искомое дифференциальное уравнение.

2. Решение задачи 4:

а) фундаментальную систему решений уравнения четвертого порядка образуют четыре функции; заданные две функции линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений уравнения $x'' - 4x = 0$;

б) заданные функции образуют фундаментальную систему решений для уравнения с характеристическим многочленом $(\lambda - 2)^4$, то есть

$$x^{IV} - 4x''' + 6x'' - 4x' + x = 0;$$

в) заданные функции образуют фундаментальную систему решений для уравнения, корни характеристического уравнения которого: $\lambda_{1,2} = 2, \lambda_{3,4} = -2$, то есть характеристический многочлен имеет вид $(\lambda^2 - 4)^2$ или $\lambda^4 - 8\lambda^2 + 16$, а соответствующее дифференциальное уравнение: $x^{IV} - 8x'' + 16x = 0$.

Для заданного в условии уравнения $x^{IV} - 16x = 0$ характеристическое уравнение $\lambda^4 - 16 = 0$ имеет корни: $\lambda_{1,2} = \pm 2, \lambda_{3,4} = \pm 2i$, то есть его фундаментальную систему решений образуют функции $e^{2t}, e^{-2t}, \sin 2t, \cos 2t$.

4. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

4.1. Однородные системы

4.1.1. Нахождение общего решения однородной системы

Рассмотрим систему линейных уравнений первого порядка, записанную в нормальной форме:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + f_1(t), \\ x_2'(t) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + f_2(t), \\ \dots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

где коэффициенты a_{ik} , $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, n$, являются постоянными величинами; $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, - неизвестные функции переменной t . Если все $f_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, положить равными нулю ($f_i(t) = 0$), то получится однородная система, соответствующая неоднородной системе (4.1):

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ x_2'(t) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{cases} \quad (4.2)$$

Согласно теореме 1.3 и замечанию 1.5 общее решение неоднородной системы (4.1) представляет собой сумму общего решения соответствующей однородной системы (4.2) и частного решения неоднородной.

Рассмотрим методы нахождения общего решения однородной системы (неоднородным системам посвящен разд.4.2).

А. Метод исключения неизвестных. В разд.1.2 указан метод решения систем линейных уравнений путем сведения системы к одному уравнению n -го порядка. Метод можно использовать для решения как однородных, так и неоднородных систем. Этот метод рассматривается далее на примерах, что позволяет продемонстрировать лежащее в его основе искусство подстановок.

Из соображений удобства в дальнейшем для записи систем двух уравнений с неизвестными функциями $x_1(t)$ и $x_2(t)$ будем использовать обозначения $x_1(t) = x(t)$ и $x_2(t) = y(t)$, а для систем трех уравнений: $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = y(t)$, $x_3(t) = z(t)$.

Пример 4.1. Найти общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x - 2y. \end{cases}$$

Решение. Продифференцировав обе части второго уравнения и подставив в полученное равенство выражение для x' из первого уравнения ($x' = y$), получим: $y'' = -x' - 2y'$ или $y'' = -y - 2y'$. Запишем последнее уравнение в виде $y'' + 2y' + y = 0$. Корни его характеристического уравнения $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ равные: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, поэтому общее решение записывается в виде (см. правило 3.3 из разд. 3.1.1.1): $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$. Используя теперь второе уравнение заданной системы, находим $x(t)$:

$$x = -y' - 2y, \quad x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} - C_2 e^{-t} - 2C_1 e^{-t} - 2C_2 t e^{-t},$$

или $x(t) = (-C_1 - C_2) e^{-t} - C_2 t e^{-t}$. Если переобозначить произвольные постоянные следующим образом: $\tilde{C}_1 = -C_1 - C_2$, $\tilde{C}_2 = -C_2$, то решение исходной системы примет вид $x(t) = \tilde{C}_1 e^{-t} + \tilde{C}_2 t e^{-t}$, $y(t) = -\tilde{C}_1 e^{-t} + \tilde{C}_2 (e^{-t} - t e^{-t})$. Решение в таком виде также можно получить, если продифференцировать первое уравнение системы и исключить из него y и y' . Таким образом, можно записать ответ:

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}, \quad y(t) = -C_1 e^{-t} + C_2 (e^{-t} - t e^{-t}).$$

Пример 4.2. Найти общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$

Решение. Продифференцируем обе части первого уравнения и исключим из полученного равенства y и y' . После дифференцирования получим: $x'' = x' + 2y'$ или $x'' = x' + 2(2x + y)$, $x'' = x' + 4x + 2y$. Но из первого уравнения системы следует, что $2y = x' - x$, поэтому $x'' = x' + 4x + x' - x$. Последнее уравнение является уравнением второго порядка: $x'' - 2x' - 3x = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ имеет корни: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, поэтому общее решение записывается в виде $x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$ (см. правило 3.1 из разд. 3.1.1.1). Выражая теперь y из первого уравнения заданной системы, находим $y(t)$:

$$y = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}x, \quad y(t) = \frac{1}{2} 3C_1 e^{3t} - \frac{1}{2} C_2 e^{-t} - \frac{1}{2} C_1 e^{3t} - \frac{1}{2} C_2 e^{-t} \text{ или } y(t) = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}.$$

Пример 4.3. Найти общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases}$$

Решение. Продифференцировав обе части первого уравнения $x'' = -y'$ и заменив y' на x , получим: $x'' + x = 0$ - уравнение второго порядка относительно $x = x(t)$. Корни его характеристического уравнения $\lambda^2 + 1 = 0$ комплексные:

$\lambda_{1,2} = \pm i$, поэтому общее решение записывается в виде $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ (см. правило 3.2 из разд.3.1.1.1). Используя теперь первое уравнение заданной системы $y = -x'$, находим выражение для $y(t)$: $y(t) = C_1 \sin t - C_2 \cos t$.

Пример 4.4. Найти общее решение однородной системы третьего порядка:

$$\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2x - y. \end{cases}$$

Решение. Продифференцировав обе части первого уравнения и подставив в полученное равенство выражения для y' и z' из двух других уравнений системы, получим: $x'' = x' + x - 2y + z$. Повторим процедуру:

$$x''' = x'' + x' - 2(x + y - z) + (2x - y) \text{ или } x''' - x'' - x' = (z - y) - (2y - z).$$

Разность $(z - y)$ выразим из первого уравнения системы, а вторую разность $(2y - z)$ - из уравнения, полученного после первого дифференцирования, а именно $2y - z = x' + x - x''$. В результате получим уравнение третьего порядка относительно $x = x(t)$:

$$x''' - x'' - x' = x' - x - x' - x + x'' \text{ или } x''' - 2x'' - x' + 2x = 0.$$

Общее решение этого уравнения $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}$ можно найти с помощью правила 3.1 из разд.3.1.1.1 (корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$). Для определения других двух функций используем два уравнения, полученные в процессе преобразований:

$$z - y = x' - x \text{ и } 2y - z = x' + x - x'',$$

из которых выражаем $y(t)$ и $z(t)$: $y = 2x' - x''$, $z = 3x' - x - x''$. Подставляя в последние два равенства выражения для $x(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$, получаем

$$y(t) = C_1 e^t - 3C_2 e^{-t}, \quad z(t) = C_1 e^t - 5C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}.$$

Пример 4.5. Найти общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z, \\ y' = x + 2z, \\ z' = -2x + y - z. \end{cases}$$

Решение. Продифференцировав обе части третьего уравнения и подставив в полученное равенство выражения для x' и y' из двух других уравнений системы, получим: $z'' + z' + 2z = (y - 2x) + (y - x)$. Используя третье уравнение, заменим разность $(y - 2x)$ на $(z' + z)$. Тогда получим $z'' + z = y - x$. Продифференцируем последнее равенство и исключим x' и y' : $z''' + z' = y' - x'$, $z''' + z' = y - x$, $z''' + z' = z'' + z$. Для решения полученного уравнения третьего порядка $z''' - z'' + z' - z = 0$ можно воспользоваться алгоритмом, приведенным в разд.3.1.1.1. Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \pm i$,

поэтому общее решение имеет вид $z(t) = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t$. Для определения других двух функций используем третье уравнение исходной системы и уравнение $z'' + z = y - x$, полученное в процессе преобразований. Выразим x и y : $x = z'' - z'$, $y = 2z'' - z' + z$. Подставляя в последние два равенства выражения для $z(t)$, $z'(t)$, $z''(t)$, окончательно находим $x(t) = (C_2 - C_3) \sin t - (C_2 + C_3) \cos t$, $y(t) = 2C_1 e^t + (C_2 - C_3) \sin t - (C_2 + C_3) \cos t$. Если переобозначить произвольные постоянные следующим образом: $\tilde{C}_1 = C_1$, $-2\tilde{C}_2 = C_2 + C_3$, $2\tilde{C}_3 = C_2 - C_3$, то решение исходной системы примет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\tilde{C}_3 \cos t + 2\tilde{C}_2 \sin t, & y(t) &= 2\tilde{C}_1 e^t + 2\tilde{C}_2 \cos t + 2\tilde{C}_3 \sin t, \\ z(t) &= \tilde{C}_1 e^t + (\tilde{C}_3 - \tilde{C}_2) \cos t - (\tilde{C}_2 + \tilde{C}_3) \sin t. \end{aligned}$$

Пример 4.6. Найти общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x' = -2x + y - 2z, \\ y' = x - 2y + 2z, \\ z' = 3x - 3y + 5z. \end{cases}$$

Решение. Из первых двух уравнений системы имеем $y' - x' = 3(x - y) + 4z$, из третьего $3(x - y) = z' - 5z$. После дифференцирования последнего равенства получаем последовательно:

$$3(x' - y') = z'' - 5z', \quad z'' - 5z' = 3(3(y - x) - 4z), \quad z'' - 5z' = 3(5z - z' - 4z).$$

Окончательно получаем уравнение второго порядка $z'' - 2z' - 3z = 0$ относительно неизвестной функции $z = z(t)$. Общее решение этого уравнения: $z(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$. Отметим, что, хотя в полученном выражении для $z(t)$ присутствуют только две произвольные постоянные, третья постоянная появится далее в выражениях для оставшихся неизвестных функций. Далее из системы

$$\begin{cases} x' - y' = z - z', \\ y' = x - 2y + 2z, \\ y = x' + 2x + 2z, \end{cases}$$

исключая y и y' , получаем $x' + x = -\frac{1}{3}(z + z')$ и, после подстановки z и z' : $x' + x = -\frac{1}{3}C_2 e^{3t}$. Общее решение этого уравнения первого порядка можно найти, например, методом вариации произвольной постоянной. Оно имеет вид $x(t) = -\frac{1}{3}C_2 e^{3t} + C_3 e^{-t}$. Наконец, функцию $y(t)$ находим из первого уравнения исходной системы $y = x' + 2x + 2z$ после подстановки найденных выражений для $x(t)$, $x'(t)$ и $z(t)$: $y(t) = \frac{1}{3}C_2 e^{3t} + (C_3 + 2C_1)e^{-t}$.

Пример 4.7. Найти общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = 3x + y - z, \\ z' = x + z. \end{cases}$$

Решение. Продифференцировав обе части второго уравнения и подставив в полученное равенство выражения для x' и z' из двух других уравнений системы, получим:

$$y'' = 3x' + y' - z' = 12x - 3y + y' - x - z = 11x - z - 3y + y' = 8x + (3x - z) + y' - 3y.$$

Далее заменяем разность $(3x - z)$ выражением из второго уравнения и получаем $y'' = 8x + 2y' - 4y$. Продифференцируем последнее равенство и подставим в полученное равенство выражение для x' из первого уравнения:

$$\begin{aligned} y''' &= 2y'' - 4y' + 8x' = 2y'' - 4y' + 8(4x - y) = \\ &= 2y'' - 4y' + 32x - 8y = 2y'' - 4y' - 8y + 4(y'' - 2y' + 4y). \end{aligned}$$

Окончательно получаем уравнение третьего порядка:

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$, которое можно записать в виде $(\lambda - 2)^3 = 0$, имеет корень $\lambda = 2$ кратности 3, поэтому общее решение уравнения записывается в виде $y(t) = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2)e^{2t}$ (см. правило 3.3 из разд.3.1.1.1). Далее из равенства $8x = y'' - 2y' + 4y$ находим выражение для $x(t)$: $x(t) = [\frac{1}{2}C_3 t^2 + \frac{1}{2}(C_2 + C_3)t + \frac{1}{4}(3C_3 + C_2)]e^{2t}$. Последнюю неизвестную функцию $z(t)$ находим из второго уравнения исходной системы: $z = 3x + y - y'$, $z(t) = \frac{1}{2}C_3 t^2 + \frac{1}{2}(C_2 - C_3)t + \frac{1}{4}(5C_2 - 4C_1 + 3C_3)$.

Пример 4.8. Найти общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ x_3' = x_4, \\ x_4' = -2x_3 - x_1. \end{cases}$$

Решение. Вводя обозначения $x(t) = x_1(t)$, $y(t) = x_2(t)$, $z(t) = x_3(t)$, $u(t) = x_4(t)$, запишем исходную систему в виде

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = u, \\ u' = -2z - x. \end{cases}$$

Продифференцируем обе части последнего уравнения системы три раза, исключая на каждом этапе функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ и их производные:

$$u'' = -2u - x' = -2u - y, \quad u''' = -2u' - y' = -2u' - z, \quad u^{IV} = -2u'' - z' = -2u'' - u.$$

Получено уравнение четвертого порядка: $u^{IV} + 2u'' + u = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$, которое можно переписать в виде $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$, имеет кратные комплексные корни: $\lambda_{1,2,3,4} = \pm i$. Общее решение уравнения согласно правилу 3.4 из разд.3.1.1.1:

$$u(t) = (C_1 + C_2 t) \cos t + (C_3 + C_4 t) \sin t.$$

Функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ можно найти непосредственно из уравнений заданной системы. Именно, из третьего уравнения получаем $z(t) = \int u(t) dt + C_5$, то есть

$$\begin{aligned} z(t) &= \int [(C_1 + C_2 t) \cos t + (C_3 + C_4 t) \sin t] dt + C_5 = \\ &= (C_2 - C_3 - C_4 t) \cos t + (C_1 + C_4 + C_2 t) \sin t + C_5, \end{aligned}$$

а из последнего уравнения системы имеем:

$$\begin{aligned} x(t) &= -2z(t) - u'(t) = (2C_4 t + 2C_3 - 2C_2 - C_2 - C_3 - C_4 t) \cos t + \\ &+ (-2C_1 - 2C_4 - 2C_2 t + C_1 + C_2 t - C_4) \sin t - 2C_5 = \\ &= (C_4 t + C_3 - 3C_2) \cos t + (-3C_4 - C_2 t - C_1) \sin t - 2C_5. \end{aligned}$$

Функцию $y(t)$ определяем из первого уравнения системы:

$$\begin{aligned} y(t) &= x'(t) = (C_4 - 3C_4 - C_2 t - C_1) \cos t + (-C_4 t - C_3 + 3C_2 - C_2) \sin t = \\ &= (-2C_4 - C_2 t - C_1) \cos t + (2C_2 - C_4 t - C_3) \sin t. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения для $y(t)$ и $z(t)$ во второе уравнение $y' = z$, получаем $C_5 = 0$. Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= (C_4 t + C_3 - 3C_2) \cos t + (-3C_4 - C_2 t - C_1) \sin t, \\ y(t) &= (-2C_4 - C_2 t - C_1) \cos t + (2C_2 - C_4 t - C_3) \sin t, \\ z(t) &= (C_2 - C_3 - C_4 t) \cos t + (C_1 + C_4 + C_2 t) \sin t, \\ u(t) &= (C_1 + C_2 t) \cos t + (C_3 + C_4 t) \sin t. \end{aligned}$$

Отметим в заключение, что продемонстрированный на примерах 4.1-4.8 метод решения однородных систем требует владения своего рода искусством - методом подстановок. Далее рассматриваются другие методы, не связанные с приведением систем к одному уравнению, которые позволяют проводить интегрирование непосредственно и могут быть представлены в форме алгоритмов.

Б. Метод сведения решения системы к задаче отыскания собственных значений и собственных векторов матрицы системы. Запишем однородную систему (4.2) в матричной форме:

$$X' = AX, \quad (4.3)$$

где $X = (x_1, \dots, x_n)^T$, $X' = (x_1', \dots, x_n')^T$, $A = \{a_{ik}\}$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, n$.

По аналогии с методом решения уравнения n -го порядка будем искать решения матричного уравнения (4.3) в виде $X(t) = h e^{\lambda t}$, где $h = (h_1, \dots, h_n)^T$ и λ - неизвестные вектор и число. Подставляя $X(t)$ в (4.3) и сокращая на $e^{\lambda t}$, получаем

$$A h = \lambda h \text{ или } (A - \lambda E) h = 0, \quad (4.4)$$

где E - единичная матрица.

Это означает, что задача нахождения h и λ есть задача отыскания собственных значений λ и собственных векторов h матрицы A . В результате решения задачи (4.4) будут найдены собственные значения $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, и соответствующие им собственные векторы $h^{(i)}$. В итоге получим решения $X_i(t) = h^{(i)} e^{\lambda_i t}$ системы (4.3). Задача нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы есть задача алгебраическая. Ниже приведен алгоритм решения этой задачи, известный из курса линейной алгебры [14].

Алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы A

1. Записать уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.5)$$

и решить его. Уравнение (4.5) называется *характеристическим*.

2. Для каждого полученного собственного значения $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, составить линейную алгебраическую систему (4.4):

$$(A - \lambda_i E)h = 0 \text{ или } \begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)h_1 + a_{12}h_2 + \dots + a_{1n}h_n = 0, \\ \dots \\ a_{n1}h_1 + a_{n2}h_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda_i)h_n = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

3. Решить систему (4.6) для каждого λ_i , то есть найти собственный вектор $h^{(i)}$ или несколько векторов, соответствующих данному собственному значению. Заметим, что определитель системы (4.6) $\det(A - \lambda_i E)$ равен нулю, поэтому она имеет бесконечное множество решений. Из этого множества решений выбирается совокупность линейно независимых решений (фундаментальная система решений).

З а м е ч а н и е 4.1.

1. Поскольку определитель системы (4.6) равен нулю, то ранг матрицы системы меньше числа неизвестных: $\text{rang}(A - \lambda_i E) = r < n$ и в системе имеется ровно r независимых уравнений, а $(n - r)$ уравнений являются зависимыми. Для нахождения решения системы выбираем r уравнений с r неизвестными $h_1, \dots, h_r$ так, чтобы определитель составленной системы Δ_r был отличен от нуля ($\Delta_r \neq 0$). Остальные $(n - r)$ неизвестных следует перенести вправо и считать параметрами. Придавая параметрам различные значения, получаем различные решения системы (4.6). Для простоты, как правило, попеременно полагают значение одного параметра равным 1, а остальные 0. В результате получается фундаментальная система решений в нормальной форме.

2. Используя свойства определителя [14]:

$$\Delta = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} \text{ и } \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{mk} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad m = 1, \dots, n, \quad i \neq m,$$

и определение корня λ_i характеристического уравнения ($\Delta(\lambda_i) = 0$), можно в качестве решения системы (4.6) выбирать вектор $h^{(i)} = (h_{1i}, \dots, h_{ni})^T$, компоненты h_{mi} которого определяются как алгебраические дополнения A_{mi} элементов любой строки m , $m = 1, \dots, n$, матрицы $(A - \lambda_i E)$.

3. Если все корни характеристического уравнения (4.5) различны (в этом случае говорят, что матрица A имеет *простой спектр* собственных значений), то система (4.3) имеет ровно n линейно независимых решений, то есть n линейно независимых собственных векторов $h^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$. В результате решения задачи (4.4), как отмечено выше, будут найдены частные решения системы (4.3). При этом, если будет получено n линейно независимых решений X_i , $i = 1, \dots, n$, то общее решение системы, согласно теореме 1.4, записывается в виде

$$X(t) = \sum_{i=1}^n C_i X_i(t) = C_1 X_1(t) + \dots + C_n X_n(t). \quad (4.7)$$

Приведем правила нахождения компонент общего решения линейной однородной системы, аналогичные изложенным в разд.3.1.1.1 для линейных уравнений n -го порядка.

П р а в и л о 4.1. (*Корни характеристического уравнения действительные, различные*). Если все корни характеристического уравнения (4.5) различные действительные числа, то есть $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$, то система (4.3) имеет n линейно независимых частных решений:

$$X_1(t) = h^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \quad X_2(t) = h^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \dots, \quad X_n(t) = h^{(n)} e^{\lambda_n t},$$

и общее решение системы в этом случае записывается в виде

$$X_0(t, C_1, C_2, \dots, C_n) = \sum_{i=1}^n C_i X_i(t) = \sum_{i=1}^n C_i h^{(i)} e^{\lambda_i t},$$

то есть

$$X_0(t, C_1, C_2, \dots, C_n) = C_1 h^{(1)} e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n h^{(n)} e^{\lambda_n t}, \quad (4.8)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ - произвольные постоянные.

З а м е ч а н и е 4.2. Если среди корней характеристического уравнения (4.5) есть комплексный корень λ ($\lambda = \alpha + i\beta$), а все коэффициенты системы (4.2) (то есть элементы матрицы A системы (4.3)) действительные числа, то число $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ также является корнем характеристического уравнения. Соответствующие паре корней $\alpha \pm i\beta$ частные решения $X(t) = h e^{\lambda t}$ и $\bar{X}(t) = \bar{h} e^{\bar{\lambda} t}$ - комплекснозначные. Поскольку ставится задача отыскания действительных решений системы дифференциальных уравнений, то в качестве решений, со-

ответствующих такой паре комплексных сопряженных собственных значений матрицы A , выбираются линейные комбинации решений $X(t)$ и $\bar{X}(t)$, а именно, $X_1(t) = \frac{X(t) + \bar{X}(t)}{2}$ и $X_2(t) = \frac{X(t) - \bar{X}(t)}{2i}$, или $X_1(t) = \operatorname{Re} X(t)$, $X_2(t) = \operatorname{Im} X(t)$. Этот вывод можно записать следующим правилом.

П р а в и л о 4.2. (*Корни характеристического уравнения комплексные, различные*). Если среди корней характеристического уравнения (4.5) есть комплексный корень $\lambda = \alpha + i\beta$, а значит, и сопряженный ему корень $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ (по свойству алгебраических уравнений с действительными коэффициентами), то компонента общего решения системы, соответствующая этой паре $\alpha \pm i\beta$ корней, записывается в виде

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) = C_1 \operatorname{Re} (h e^{\lambda t}) + C_2 \operatorname{Im} (h e^{\lambda t}), \quad (4.9)$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

П р а в и л о 4.3. (*Корни характеристического уравнения действительные, кратные*). Если среди корней характеристического уравнения (4.5) есть равные действительные корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k$, то есть корень $\lambda_1 = \lambda$ имеет кратность k , и матрица A имеет k линейно независимых собственных векторов $h^{(1)}, \dots, h^{(k)}$, соответствующих этому собственному значению, то соответствующая компонента общего решения системы имеет вид

$$X(t) = \sum_{i=1}^k C_i h^{(i)} e^{\lambda t} = e^{\lambda t} (C_1 h^{(1)} + \dots + C_k h^{(k)}), \quad (4.10)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_k$ - произвольные постоянные.

П р а в и л о 4.4. (*Корни характеристического уравнения комплексные, кратные*). Если среди корней характеристического уравнения (4.5) есть комплексный корень $\lambda = \alpha + i\beta$ кратности k , а значит, и комплексный сопряженный ему корень $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ той же кратности, и этой паре $\alpha \pm i\beta$ корней соответствуют $2k$ линейно независимых собственных векторов $h^{(j)}, \bar{h}^{(j)}$, $j = 1, \dots, k$, то соответствующая компонента общего решения системы имеет вид

$$\begin{aligned} X(t) &= \sum_{j=1}^k C_j \operatorname{Re} (h^{(j)} e^{\lambda t}) + \sum_{j=1}^k C_{k+j} \operatorname{Im} (h^{(j)} e^{\lambda t}) = \\ &= C_1 \operatorname{Re} (h^{(1)} e^{\lambda t}) + C_2 \operatorname{Re} (h^{(2)} e^{\lambda t}) + \dots + C_k \operatorname{Re} (h^{(k)} e^{\lambda t}) + \\ &+ C_{k+1} \operatorname{Im} (h^{(1)} e^{\lambda t}) + C_{k+2} \operatorname{Im} (h^{(2)} e^{\lambda t}) + \dots + C_{2k} \operatorname{Im} (h^{(k)} e^{\lambda t}), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $C_1, \dots, C_k, C_{k+1}, \dots, C_{2k}$ - произвольные постоянные.

Алгоритм нахождения общего решения системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами методом Б

1. Записать матрицу A системы (4.2).
2. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A . При этом число полученных линейно независимых собственных векторов матрицы A должно равняться порядку системы (4.2), то есть n . В противном случае система должна решаться другим методом (см. методы А или В).
3. Пользуясь правилами 4.1-4.4, выписать все компоненты общего решения в зависимости от типа корней.

Пример 4.9. Найти общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$

Решение. 1. Запишем матрицу системы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы A .

а) Характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ запишем в виде

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$ - собственные значения матрицы A .

б) Для каждого собственного значения λ_i составим систему уравнений $(A - \lambda_i E)h = 0$, решив которую, найдем собственный вектор.

В случае $\lambda_1 = 3$ система $(A - \lambda_1 E)h^{(1)} = 0$, где $h^{(1)} = (h_1, h_2)^T$, имеет вид

$$\begin{cases} -2h_1 + 2h_2 = 0, \\ 2h_1 - 2h_2 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим: $h_1 = h_2$, и, полагая $h_1 = 1$ (согласно п.1 замечания 4.1), получаем собственный вектор $h^{(1)} = (1, 1)^T$, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 3$.

В случае $\lambda_2 = -1$ система $(A - \lambda_2 E)h^{(2)} = 0$, где $h^{(2)} = (h_1, h_2)^T$, имеет вид

$$\begin{cases} 2h_1 + 2h_2 = 0, \\ 2h_1 + 2h_2 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим $h_1 = -h_2$, и, полагая $h_1 = 1$ (согласно п.1 замечания 4.1), получаем собственный вектор $h^{(2)} = (1, -1)^T$, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = -1$.

3. Запишем общее решение исходной системы согласно правилу 4.1 (формула (4.8)):

$$X(t) = C_1 h^{(1)} e^{3t} + C_2 h^{(2)} e^{-t} = C_1 (1, 1)^T e^{3t} + C_2 (1, -1)^T e^{-t} = C_1 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Отсюда $x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$, $y(t) = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}$. Отметим, что это решение совпадает с полученным в примере 4.2.

Пример 4.10. Найти общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases}$$

Решение. 1. Запишем матрицу системы: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы A :

а) характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ запишем в виде

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda^2 + 1 = 0.$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2} = \pm i$ - собственные значения матрицы A ;

б) для каждого собственного значения λ_i надо найти собственный вектор, но согласно замечанию 4.2 достаточно найти собственный вектор, отвечающий одному из комплексных сопряженных собственных значений, например, для $\lambda_1 = i$. Система $(A - \lambda_1 E)h = 0$ имеет вид

$$\begin{cases} -ih_1 - h_2 = 0, \\ h_1 - ih_2 = 0; \end{cases}$$

в) поскольку определитель полученной алгебраической системы $\det(A - \lambda_1 E)$ равен нулю, то в системе только одно уравнение независимое, другое - его следствие (например, второе уравнение получается из первого умножением на i). Из первого уравнения находим $h_2 = -ih_1$ и, полагая $h_1 = 1$, получаем $h_2 = -i$ и собственный вектор $h = (1, -i)^T$, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = i$.

3. Запишем общее решение исходной системы согласно правилу 4.2 (формула (4.9)):

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t); \quad X_1(t) = \operatorname{Re}(he^{it}), \quad X_2(t) = \operatorname{Im}(he^{it}).$$

Найдем X_1 и $X_2(t)$:

$$he^{it} = (1, -i)^T e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ -i \cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{Re}(he^{it}) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im}(he^{it}) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $X(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$ или

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad y(t) = C_1 \sin t - C_2 \cos t.$$

Отметим, что это решение совпадает с полученным в примере 4.3.

Пример 4.11. Найти общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2x - y. \end{cases}$$

Решение. 1. Запишем матрицу системы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы A :

а) характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ запишем в виде

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $(1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$. Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$ - собственные значения матрицы A ;

б) для каждого собственного значения λ_i составим систему уравнений $(A - \lambda_i E)h = 0$, решив которую, найдем собственный вектор.

В случае $\lambda_1 = 1$ система $(A - \lambda_1 E)h^{(1)} = 0$, где $h^{(1)} = (h_1, h_2, h_3)^T$, имеет вид

$$\begin{cases} -h_2 + h_3 = 0, \\ h_1 - h_3 = 0, \\ 2h_1 - h_2 - h_3 = 0. \end{cases}$$

Для этой системы имеем $\det(A - \lambda_1 E) = 0$ и $\text{rang}(A - \lambda_1 E) = 2$, поэтому одно уравнение является следствием двух других. Оставляем любые два линейно независимых уравнения, например, первые два: $-h_2 + h_3 = 0$ и $h_1 - h_3 = 0$. Из этих уравнений получаем: $h_3 = h_1$ и $h_2 = h_3 = h_1$. Полагая $h_1 = 1$, получаем собственный вектор $h^{(1)} = (1, 1, 1)^T$, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 1$.

В случае $\lambda_2 = -1$ для нахождения $h^{(2)} = (h_1, h_2, h_3)^T$ применим метод, описанный в п.2 замечания 4.1. Выписываем матрицу $(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Компоненты вектора $h^{(2)}$ определяем как алгебраические дополнения элементов первой строки:

$$h_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad h_2 = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad h_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5.$$

Получаем собственный вектор $h^{(2)} = (1, -3, -5)^T$, отвечающий собственному значению $\lambda_2 = -1$.

Применив любой из рассмотренных методов, находим собственный вектор $h^{(3)}$, отвечающий собственному значению $\lambda_3 = 2$, а именно, $h^{(3)} = (1, 0, 1)^T$.

3. Запишем общее решение исходной системы согласно правилу 4.1 (формула (4.8)):

$$\begin{aligned} X(t) &= C_1 h^{(1)} e^{-t} + C_2 h^{(2)} e^{-t} + C_3 h^{(3)} e^{2t} = C_1 (1, 1, 1)^T e^{-t} + C_2 (1, -3, -5)^T e^{-t} + C_3 (1, 0, 1)^T e^{2t} = \\ &= C_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -3e^{-t} \\ -5e^{-t} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}, \quad y(t) = C_1 e^{-t} - 3C_2 e^{-t}, \quad z(t) = C_1 e^{-t} - 5C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}.$$

Отметим, что это решение совпадает с полученным в примере 4.4.

Пример 4.12. Найти общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z, \\ y' = x + 2z, \\ z' = y - 2x - z. \end{cases}$$

Решение. 1. Запишем матрицу системы: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы A :

а) характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ запишем в виде

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$. Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \pm i$ - собственные значения матрицы A ;

б) для каждого собственного значения λ_i составим систему уравнений $(A - \lambda_i E)h = 0$, решив которую, найдем собственный вектор.

В случае $\lambda_1 = 1$ система $(A - \lambda_1 E)h^{(1)} = 0$, где $h^{(1)} = (h_1, h_2, h_3)^T$, имеет вид

$$\begin{cases} h_1 - h_2 + 2h_3 = 0, \\ h_1 - h_2 + 2h_3 = 0, \\ -2h_1 + h_2 - 2h_3 = 0. \end{cases}$$

Поскольку для этой системы $\det(A - \lambda_1 E) = 0$ и $\text{rang}(A - \lambda_1 E) = 2$, то одно уравнение является следствием двух других. Оставляем два уравнения: $h_1 - h_2 + 2h_3 = 0$ и $-2h_1 + h_2 - 2h_3 = 0$. Из этих двух уравнений получаем $h_1 = 0$ и $h_2 = 2h_3$. Полагая $h_3 = 1$, получаем собственный вектор $h^{(1)} = (0, 2, 1)^T$, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 1$.

Для пары комплексных сопряженных корней $\lambda_{2,3} = \pm i$ согласно замечанию 4.2 достаточно найти собственный вектор, отвечающий одному из них, например, $\lambda_2 = i$. Для $h^{(2)} = (h_1, h_2, h_3)^T$ система $(A - \lambda_2 E)h^{(2)} = 0$ имеет вид

$$\begin{cases} (2-i)h_1 - h_2 + 2h_3 = 0, \\ h_1 - ih_2 + 2h_3 = 0, \\ -2h_1 + h_2 - (1+i)h_3 = 0. \end{cases}$$

Для нахождения $h^{(2)}$ применим метод, описанный в п.2 замечания 4.1. Компоненты вектора $h^{(2)}$ определяем как алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1 & 2 \\ 1 & -i & 2 \\ -2 & 1 & -1-i \end{pmatrix}: h_1 = (i-1-2), h_2 = -(-1-i+4),$$

$h_3 = (1-2i)$. Получаем вектор $(-3+i, -3+i, 1-2i)^T$. Для удобства записи в качестве собственного вектора $h^{(2)}$ выберем вектор $\frac{2}{i-3}(-3+i, -3+i, 1-2i)^T$, то есть $h^{(2)} = (2, 2, i-1)^T$.

3. Запишем общее решение исходной системы согласно правилам 4.1 (формула (4.8)) и 4.2 (формула (4.9)):

$$X(t) = C_1 h^{(1)} e^t + C_2 \operatorname{Re}(h^{(2)} e^{it}) + C_3 \operatorname{Im}(h^{(2)} e^{it}).$$

Найдем компоненты общего решения $X_2(t) = \operatorname{Re}(h^{(2)} e^{it})$ и $X_3(t) = \operatorname{Im}(h^{(2)} e^{it})$. Для этого запишем произведение:

$$h^{(2)} e^{it} = (2, 2, i-1)^T (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} 2\cos t + 2i \sin t \\ 2\cos t + 2i \sin t \\ (-\cos t - \sin t) + i(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем:

$$\operatorname{Re}(h^{(2)} e^{it}) = (2\cos t, 2\cos t, -\sin t - \cos t)^T,$$

$$\operatorname{Im}(h^{(2)} e^{it}) = (2\sin t, 2\sin t, -\sin t + \cos t)^T.$$

Общее решение системы:

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\cos t \\ -\sin t - \cos t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2\sin t \\ -\sin t + \cos t \end{pmatrix},$$

или

$$x(t) = 2C_2 \cos t + 2C_3 \sin t,$$

$$y(t) = 2C_1 e^t + 2C_2 \cos t + 2C_3 \sin t,$$

$$\begin{aligned} z(t) &= C_1 e^t - C_2 (\cos t + \sin t) - C_3 (\sin t - \cos t) = \\ &= C_1 e^t + (C_3 - C_2) \cos t - (C_2 + C_3) \sin t. \end{aligned}$$

Отметим, что это решение совпадает с полученным в примере 4.5.

Пример 4.13. Найти общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x' = y - 2x - 2z, \\ y' = x - 2y + 2z, \\ z' = 3x - 3y + 5z. \end{cases}$$

Решение. 1. Запишем матрицу системы: $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы A :
а) характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ запишем в виде

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $(-1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0$ или $-(\lambda+1)^2(\lambda-3) = 0$. Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2,3} = -1$, то есть корень $\lambda = -1$ имеет кратность 2;

б) для каждого собственного значения λ_i составим систему уравнений $(A - \lambda_i E)h = 0$, решив которую, найдем собственный вектор.

В случае $\lambda_1 = 3$ вектор $h^{(1)} = (h_1, h_2, h_3)^T$ найдем из системы $(A - \lambda_1 E)h^{(1)} = 0$, вычислив алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Получаем вектор $(-4, 4, 12)^T$, а собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 3$, выбираем равным $h^{(1)} = -1/4(-4, 4, 12)^T = (1, -1, -3)^T$.

В случае $\lambda_2 = -1$ система $(A - \lambda_2 E)h^{(2)} = 0$, где $h^{(2)} = (h_1, h_2, h_3)^T$, имеет вид

$$\begin{cases} -h_1 + h_2 - 2h_3 = 0, \\ h_1 - h_2 + 2h_3 = 0, \\ 3h_1 - 3h_2 + 6h_3 = 0. \end{cases}$$

Поскольку для этой системы $\det(A - \lambda_2 E) = 0$ и $\text{rang}(A - \lambda_2 E) = 1$, то система имеет лишь одно линейно независимое уравнение, например, $h_1 - h_2 + 2h_3 = 0$, из которого получаем $2h_3 = h_2 - h_1$. Полагая попеременно h_1 и h_2 равными 0 и 1, получаем два линейно независимых собственных вектора, отвечающих собственному значению $\lambda_2 = -1$ кратности 2: $(1, 0, -1/2)^T$ (получается при $h_1 = 1$ и $h_2 = 0$) и $(0, 1, 1/2)^T$ (получается при $h_1 = 0$ и $h_2 = 1$). Умножив найденные векторы на 2, в качестве искоемых векторов $h^{(2)}$ и $h^{(3)}$ выбираем соответственно векторы $(2, 0, -1)^T$ и $(0, 2, 1)^T$.

3. Запишем общее решение исходной системы согласно правилу 4.3 (формула (4.10)):

$$\begin{aligned} X(t) &= C_1 h^{(1)} e^{3t} + C_2 h^{(2)} e^{-t} + C_3 h^{(3)} e^{-t} = \\ &= C_1 (1, -1, -3)^T e^{3t} + C_2 (2, 0, -1)^T e^{-t} + C_3 (0, 2, 1)^T e^{-t}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$x(t) = C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{-t}, \quad y(t) = -C_1 e^{3t} + 2C_3 e^{-t}, \quad z(t) = -3C_1 e^{3t} + (C_3 - C_2) e^{-t}.$$

Отметим, что это решение можно преобразовать к виду, полученному в примере 4.6.

Пример 4.14. Решить следующие однородные системы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} x' = y, \\ y' = -x - 2y; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = u, \\ u' = -2z - x; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = 3x + y - z, \\ z' = x + z. \end{cases} \end{array}$$

Решение. В примерах 4.1, 4.7 и 4.8 получено решение этих систем методом сведения к одному уравнению. Покажем, что решить эти системы с помощью алгоритма, рассматриваемого в данном разделе, нельзя, так как матрицы всех этих систем имеют менее чем n линейно независимых собственных векторов.

а) Выписываем матрицу A и характеристическое уравнение системы второго порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$

корень которого $\lambda = -1$ имеет кратность 2. Система $(A - \lambda E)h = 0$ сводится к одному уравнению $h_1 + h_2 = 0$, то есть матрица A (матрица второго порядка) имеет один линейно независимый собственный вектор $h = (1, -1)^T$.

б) Выписываем матрицу A и характеристическое уравнение системы четвертого порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет пару комплексных сопряженных корней $\lambda = \pm i$ кратности 2. Система $(A - \lambda E)h = 0$ при $\lambda = i$ дает лишь один линейно независимый собственный вектор, так как $\text{rang}(A - iE) = 3$. То же самое получается и для $\lambda = -i$. Таким образом, матрица A (матрица четвертого порядка) имеет только два линейно независимых собственных вектора.

в) Выписываем матрицу A и характеристическое уравнение системы третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = (2-\lambda)^3 = 0.$$

Корень характеристического уравнения $\lambda = 2$ имеет кратность 3. Система $(A - \lambda E)h = 0$ при $\lambda = 2$ дает лишь один линейно независимый собственный вектор, так как $\text{rang}(A - 2E) = 2$.

В. Метод неопределенных коэффициентов. Приведенный выше алгоритм решения системы с помощью собственных векторов оказался непригодным для решения систем из примера 4.14. Но, как показывает анализ решений всех других примеров и сравнение методов А и Б, характеристические уравнения системы (в методе Б) и уравнения n -го порядка, к которому она может быть сведена (в методе А), совпадают. Этот факт указывает на аналогию в решении систем и уравнений. Вместе с тем из предыдущего раздела также следует, что общий вид (форма записи) решения системы становится известным, как только найдены собственные значения. Нахождение собственных векторов в методе Б позволяет полностью конкретизировать вид искомого решения. В тех же случаях (как в примере 4.14), когда задача нахождения собственных векторов неразрешима, следует использовать метод подбора неопределенных коэффициентов. Этот метод состоит в том, что, зная предполагаемый вид решения, искать его следует в той же форме, рассматривая входящие в него неизвестные коэффициенты как неопределенные. Эти неопределенные коэффициенты подбираются так, чтобы выражение, рассматриваемое как предполагаемое решение, действительно являлось решением заданной системы.

Алгоритм нахождения общего решения однородной системы методом В

1. Составить характеристическое уравнение (4.4) и найти его корни.
2. Выписать предполагаемый вид общего решения для каждой компоненты $X(t)$, следуя правилам 3.1-3.4 из разд.3. При этом коэффициенты при различных компонентах общего решения должны быть различны.
3. Подставить полученные в п.2 выражения в заданную однородную систему уравнений и приравнять коэффициенты при одинаковых функциях от t .
4. Решить полученную систему алгебраических уравнений и выписать общее решение, зависящее от n произвольных постоянных $C_1, \dots, C_n$.

З а м е ч а н и е 4.3.

1. Во многих случаях для выполнения п.3 алгоритма достаточно подставить компоненты общего решения только в $(n-1)$ уравнение, что облегчает решение задачи в п.4. Методика выбора таких уравнений поясняется далее на примерах.

2. В п.4 алгоритма достаточно выразить неопределенные коэффициенты через любые n коэффициентов (принять их в качестве произвольных постоянных $C_1, \dots, C_n$).

Пример 4.15. Найти общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x - 2y. \end{cases}$$

Решение. Выписываем матрицу системы: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $n = 2$.

1. Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ имеет корень $\lambda = -1$ кратности 2.

2. Согласно правилу 3.3 решение следует искать в виде

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t}, \quad y(t) = (B_1 + B_2 t)e^{-t}.$$

3. Подставляя полученные выражения в первое уравнение (согласно п.1 замечания 4.3), получаем

$$C_2 e^{-t} - (C_1 + C_2 t)e^{-t} = (B_1 + B_2 t)e^{-t}.$$

Приравнявая коэффициенты при функциях e^{-t} и te^{-t} , получаем

$$C_2 - C_1 = B_1, \quad -C_2 = B_2.$$

4. Выражаем из уравнений, полученных в предыдущем пункте, коэффициенты B_1, B_2 через C_1, C_2 : $B_1 = C_2 - C_1$, $B_2 = -C_2$. Отсюда получаем общее решение заданной однородной системы:

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}, \quad y(t) = (C_2 - C_1) e^{-t} - C_2 t e^{-t},$$

или

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} te^{-t} \\ e^{-t} - te^{-t} \end{pmatrix} = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t),$$

где $X_1(t), X_2(t)$ - элементы фундаментальной системы решений. Отметим, что это решение совпадает с полученным в примере 4.1.

Пример 4.16. Найти общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$

Решение. Выписываем матрицу системы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $n = 2$.

1. Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ имеет корни: $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = -1$.

2. Согласно правилу 3.1 решение следует искать в виде

$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, \quad y(t) = B_1 e^{3t} + B_2 e^{-t}.$$

3. Подставляя полученные выражения в первое уравнение (согласно п.1 замечания 4.3), получаем

$$3C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + 2B_1 e^{3t} + 2B_2 e^{-t}.$$

Приравнявая коэффициенты при функциях e^{3t} и e^{-t} , имеем

$$3C_1 = C_1 + 2B_1, \quad -C_2 = C_2 + 2B_2.$$

4. Выражаем из уравнений, полученных в предыдущем пункте, коэффициенты B_1, B_2 через C_1, C_2 : $B_1 = C_1, B_2 = -C_2$. В результате общее решение заданной однородной системы имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, \quad y(t) = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}.$$

Отметим, что это решение совпадает с полученным в примерах 4.2 и 4.9.

Пример 4.17. Найти общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases}$$

Решение. Выписываем матрицу системы: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $n = 2$.

1. Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$ имеет комплексные сопряженные корни: $\lambda_{1,2} = \pm i$.

2. Согласно правилу 3.2 решение следует искать в виде

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad y(t) = B_1 \cos t + B_2 \sin t.$$

3. Подставляя полученные выражения в первое уравнение (согласно п.1 замечания 4.3), получаем

$$-C_1 \sin t + C_2 \cos t = -B_1 \cos t - B_2 \sin t.$$

Приравнявая коэффициенты при функциях $\sin t$ и $\cos t$, получаем

$$-C_1 = -B_2, \quad C_2 = -B_1.$$

4. Выражаем из уравнений, полученных в предыдущем пункте, коэффициенты B_1, B_2 через C_1, C_2 : $B_1 = -C_2, B_2 = C_1$. В результате общее решение заданной однородной системы имеет вид

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad y(t) = C_1 \sin t - C_2 \cos t,$$

или

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t),$$

где $X_1(t)$, $X_2(t)$ - элементы фундаментальной системы решений. Отметим, что это решение совпадает с полученным в примерах 4.3 и 4.10.

Пример 4.18. Найти общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2x - y. \end{cases}$$

Решение. Выписываем матрицу системы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $n = 3$.

1. Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$,

$\lambda_2 = -1$ и $\lambda_3 = 2$.

2. Согласно правилу 3.1 решение следует искать в виде

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}, \quad y(t) = A_1 e^t + A_2 e^{-t} + A_3 e^{2t}, \quad z(t) = B_1 e^t + B_2 e^{-t} + B_3 e^{2t}.$$

3. Подставляем полученные выражения в систему, причем, используя п.1 замечания 4.3, учитываем возможность их подстановки только в два уравнения. Для каждого собственного значения выпишем матрицу $(A - \lambda_k E)$ и выясним, в любые ли два уравнения достаточно подставить функции из п.2, чтобы выразить шесть из девяти коэффициентов A_k , B_k , C_k , $k = 1, 2, 3$, через три. В матрицах

$$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (A - \lambda_3 E) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

любые две строки попарно линейно независимы, а в матрице

$$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

первая и третья строки совпадают, поэтому для нахождения коэффициентов можно подставить выражения для искомых функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ из п.2 либо в систему из трех уравнений, либо в систему из двух уравнений (первое и второе или второе и третье). Отметим, что подстановка в первое и третье уравнение системы не позволит решить задачу, то есть выразить шесть коэффициентов через три. Подставим, например, в первое и второе уравнения системы:

$$\begin{aligned} & C_1 e^t - C_2 e^{-t} + 2C_3 e^{2t} = \\ & = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t} + B_1 e^t + B_2 e^{-t} + B_3 e^{2t} - A_1 e^t - A_2 e^{-t} - A_3 e^{2t}, \end{aligned}$$

$$A_1 e^t - A_2 e^{-t} + 2A_3 e^{2t} = \\ = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t} + A_1 e^t + A_2 e^{-t} + A_3 e^{2t} - B_1 e^t - B_2 e^{-t} - B_3 e^{2t},$$

или

$$e^{-t} (2C_2 + B_2 - A_2) + e^t (B_1 - A_1) + e^{2t} (B_3 - A_3 - C_3) = 0, \\ e^{-t} (C_2 + 2A_2 - B_2) + e^t (C_1 - B_1) + e^{2t} (C_3 - A_3 - B_3) = 0.$$

Приравнявая коэффициенты при функциях e^{-t} , e^t и e^{2t} нулю, получаем систему из шести уравнений с девятью неизвестными:

$$2C_2 + B_2 - A_2 = 0, \quad B_1 - A_1 = 0, \quad B_3 - A_3 - C_3 = 0, \quad C_2 + 2A_2 - B_2 = 0, \\ C_1 - B_1 = 0, \quad C_3 - A_3 - B_3 = 0.$$

4. Выражаем из уравнений, полученных в предыдущем пункте, коэффициенты $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ через C_1, C_2, C_3 : $A_1 = B_1 = C_1$, $A_2 = -3C_2$, $B_2 = -5C_2$, $B_3 = C_3$, $A_3 = 0$. В результате получаем общее решение заданной однородной системы:

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}, \quad y(t) = C_1 e^t - 3C_2 e^{-t}, \quad z(t) = C_1 e^t - 5C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}.$$

Пример 4.19. Найти общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z, \\ y' = x + 2z, \\ z' = -2x + y - z. \end{cases}$$

Решение. 1. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
 имеет

корни: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \pm i$ (см. пример 4.12).

2. Согласно правилам 3.1 и 3.2, решение следует искать в виде

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t, \quad y(t) = A_1 e^t + A_2 \cos t + A_3 \sin t, \\ z(t) = B_1 e^t + B_2 \cos t + B_3 \sin t.$$

3. Подставляем полученные выражения в систему:

$$C_1 e^t - C_2 \sin t + C_3 \cos t = 2C_1 e^t + 2C_2 \cos t + 2C_3 \sin t + \\ + 2B_1 e^t + 2B_2 \cos t + 2B_3 \sin t - A_1 e^t - A_2 \cos t - A_3 \sin t;$$

$$A_1 e^t - A_2 \sin t + A_3 \cos t = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t + 2B_1 e^t + 2B_2 \cos t + 2B_3 \sin t;$$

$$B_1 e^t - B_2 \sin t + B_3 \cos t = A_1 e^t + A_2 \cos t + A_3 \sin t - \\ - 2C_1 e^t - 2C_2 \cos t - 2C_3 \sin t - B_1 e^t - B_2 \cos t - B_3 \sin t.$$

Приравнявая коэффициенты при функциях e^t , $\cos t$ и $\sin t$ нулю, получаем систему из девяти уравнений с девятью неизвестными:

$$\begin{aligned}C_1 + 2B_1 - A_1 &= 0, & A_1 - 2B_1 - 2C_1 &= 0, & C_3 + 2B_3 + A_2 &= 0, \\A_2 - 2C_2 - B_2 - B_3 &= 0, & C_2 + 2B_2 - A_3 &= 0, & A_3 - 2C_3 - B_3 + B_2 &= 0, \\C_1 + 2B_1 - A_1 &= 0, & C_2 + 2C_3 + 2B_3 - A_3 &= 0, & 2C_2 + 2B_2 - A_2 - C_3 &= 0.\end{aligned}$$

4. Выражаем из уравнений, полученных в предыдущем пункте, коэффициенты $A_1, A_2, A_3, C_1, C_2, C_3$ через B_1, B_2, B_3 : $C_1 = 0, C_2 = -B_2 - B_3, C_3 = B_2 - B_3, A_1 = 2B_1, A_2 = -B_2 - B_3, A_3 = B_2 - B_3$. Получаем общее решение заданной однородной системы:

$$\begin{aligned}x(t) &= (B_2 - B_3) \sin t - (B_2 + B_3) \cos t, \\y(t) &= 2B_1 e^t - (B_2 + B_3) \cos t + (B_2 - B_3) \sin t, \\z(t) &= B_1 e^t + B_2 \cos t + B_3 \sin t.\end{aligned}$$

Отметим, что это решение совпадает с полученным в примере 4.5, если переобозначить $B_i = C_i, i = 1, 2, 3$.

Пример 4.20. Найти общее решение однородной системы:

$$\begin{cases}x' = -2x + y - 2z, \\y' = x - 2y + 2z, \\z' = 3x - 3y + 5z.\end{cases}$$

Решение. 1. Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 3, \lambda_{2,3} = -1$ (см. пример 4.13).

2. Согласно правилам 3.1 и 3.3 решение следует искать в виде

$$x(t) = C_1 e^{3t} + (C_2 + C_3 t) e^{-t}, \quad y(t) = A_1 e^{3t} + (A_2 + A_3 t) e^{-t}, \quad z(t) = B_1 e^{3t} + (B_2 + B_3 t) e^{-t}.$$

3. Подставляем полученные выражения в систему:

$$\begin{aligned}3C_1 e^{3t} + C_3 e^{-t} - (C_2 + C_3 t) e^{-t} &= A_1 e^{3t} + (A_2 + A_3 t) e^{-t} - \\&- 2C_1 e^{3t} - 2(C_2 + C_3 t) e^{-t} - 2B_1 e^{3t} - 2(B_2 + B_3 t) e^{-t}, \\3A_1 e^{3t} + A_3 e^{-t} - (A_2 + A_3 t) e^{-t} &= C_1 e^{3t} + (C_2 + C_3 t) e^{-t} - \\&- 2A_1 e^{3t} - 2(A_2 + A_3 t) e^{-t} + 2B_1 e^{3t} + 2(B_2 + B_3 t) e^{-t}, \\3B_1 e^{3t} + B_3 e^{-t} - (B_2 + B_3 t) e^{-t} &= 3C_1 e^{3t} + 3(C_2 + C_3 t) e^{-t} - \\&- 3A_1 e^{3t} - 3(A_2 + A_3 t) e^{-t} + 5B_1 e^{3t} + 5(B_2 + B_3 t) e^{-t}.\end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при функциях e^{3t}, e^{-t} и te^{-t} нулю, получаем систему из девяти уравнений с девятью неизвестными:

$$\begin{aligned}A_1 - 5C_1 - 2B_1 &= 0, & C_1 - 5A_1 + 2B_1 &= 0, & A_2 - C_2 - 2B_2 - C_3 &= 0, & C_2 - A_2 + 2B_2 - A_3 &= 0, \\A_3 - C_3 - 2B_3 &= 0, & C_3 - A_3 + 2B_3 &= 0, & 3C_1 + 2B_1 - 3A_1 &= 0, & 3C_2 - 3A_2 + 6B_2 - B_3 &= 0, \\& & 3C_3 - 3A_3 + 6B_3 &= 0.\end{aligned}$$

4. Выражаем из уравнений, полученных в предыдущем пункте, коэффициенты $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ через C_1, C_2, C_3 : $A_3 = B_3 = C_3 = 0, A_1 = -C_1,$

$A_2 = 2C_3$, $B_1 = -3C_1$, $B_2 = C_3 - \frac{1}{2}C_2$. В результате получаем общее решение заданной однородной системы:

$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, \quad y(t) = -C_1 e^{3t} + 2C_3 e^{-t}, \quad z(t) = -3C_1 e^{3t} + (C_3 - \frac{1}{2}C_2) e^{-t}.$$

Отметим, что это решение совпадает с полученным в примере 4.13, если переобозначить $\tilde{C}_2 = 2C_2$.

Пример 4.21. Найти общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ x_3' = x_4, \\ x_4' = -2x_3 - x_1. \end{cases}$$

Решение. Здесь $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $n = 4$.

1. Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$ имеет

комплексные сопряженные корни: $\lambda = \pm i$ кратности 2.

2. Согласно правилу 3.4 решение следует искать в виде

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (C_1 + C_2 t) \cos t + (C_3 + C_4 t) \sin t, & x_2(t) &= (B_1 + B_2 t) \cos t + (B_3 + B_4 t) \sin t, \\ x_3(t) &= (D_1 + D_2 t) \cos t + (D_3 + D_4 t) \sin t, & x_4(t) &= (E_1 + E_2 t) \cos t + (E_3 + E_4 t) \sin t. \end{aligned}$$

3. Подставляя полученные выражения в первые три уравнения системы и приравнивая коэффициенты при функциях $\sin t$, $\cos t$ в левой и правой частях полученных равенств, получаем систему из девяти уравнений с девятью неизвестными:

$$\begin{aligned} -C_1 + C_4 &= B_3, & -B_1 + B_4 &= D_3, & -D_1 + D_4 &= E_3, & C_2 + C_3 &= B_1, & B_2 + B_3 &= D_1, \\ D_2 + D_3 &= E_1, & -C_2 &= B_4, & -B_2 &= D_4, & -D_2 &= E_4, & C_4 &= B_2, & B_4 &= D_2, & D_4 &= E_2. \end{aligned}$$

4. Решение системы: $B_1 = C_2 + C_3$, $B_2 = C_4$, $B_3 = C_4 - C_1$, $B_4 = -C_2$, $D_1 = 2C_4 - C_1$, $D_2 = -C_2$, $D_3 = -2C_2 - C_3$, $D_4 = -C_4$, $E_1 = -3C_2 - C_3$, $E_2 = -C_4$, $E_3 = -3C_4 + C_1$, $E_4 = C_2$. Общее решение заданной однородной системы получаем в виде

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (C_1 + C_2 t) \cos t + (C_3 + C_4 t) \sin t, \\ x_2(t) &= (C_2 + C_3 + C_4 t) \cos t + (C_4 - C_1 - C_2 t) \sin t, \\ x_3(t) &= (2C_4 - C_1 - C_2 t) \cos t + (-2C_2 - C_3 - C_4 t) \sin t, \\ x_4(t) &= (-3C_2 - C_3 - C_4 t) \cos t + (-3C_4 + C_1 + C_2 t) \sin t. \end{aligned}$$

4.1.2. Анализ устойчивости

Рассмотрим задачу анализа асимптотической устойчивости многомерных систем, описываемых уравнением состояния (1.31):

$$X'(t) = AX(t) + BG(t), \quad X(0) = X_0. \quad (4.12)$$

Из п.6 разд.1.2 следует, что решение этой задачи сводится к анализу поведения решения соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений (свободного движения).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. (Критерий устойчивости). Для асимптотической устойчивости системы (4.12) необходимо и достаточно, чтобы корни λ_i характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ имели отрицательные действительные части: $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$, то есть располагались в левой полуплоскости комплексной плоскости (см. рис.3.1).

Пример 4.22. Исследовать устойчивость системы:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2, \\ x_2' = 4x_1 + 3x_2 + g_1. \end{cases}$$

Решение. Здесь $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $G = g_1$. Корни характеристического уравнения $\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ действительные, разных знаков: $\lambda_1 = 5 > 0$, $\lambda_2 = -1 < 0$. Согласно утверждению 4.1 система не является асимптотически устойчивой.

Пример 4.23. Исследовать устойчивость системы:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1 - 2x_2 + g_1. \end{cases}$$

Решение. Здесь $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $G = g_1$. Корень характеристического уравнения $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ действительный, кратности 2: $\lambda_{1,2} = -1 < 0$. Согласно утверждению 4.1 система является асимптотически устойчивой.

Пример 4.24. Исследовать устойчивость системы:

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + g_1, \\ x_2' = x_1 + g_2. \end{cases}$$

Решение. Здесь $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$.

Корни характеристического уравнения $\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$ комплексные сопряженные: $\lambda_{1,2} = \pm i$. Поскольку действительные части обоих корней равны нулю, то согласно утверждению 4.1 система не является асимптотически устойчивой.

Пример 4.25. Исследовать устойчивость динамических систем, описываемых однородными системами дифференциальных уравнений, заданными в примерах 4.9-4.14.

Решение. Анализируя положение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости, делаем вывод о неустойчивости систем из примеров 4.9-4.13, 4.14"б", "в" и об асимптотической устойчивости в примере 4.14"а".

4.2. Неоднородные системы

4.2.1. Нахождение общего решения неоднородной системы.

Метод приведения системы n линейных уравнений
к одному уравнению n -го порядка

Задача нахождения общего решения линейной неоднородной системы методом приведения к одному уравнению решается по той же схеме, что и в случае однородных систем (см. разд.4.1.1). Рассматриваемый метод иллюстрируется далее на ряде примеров.

В примерах 4.26-4.32 требуется найти общее решение системы второго порядка методом приведения к одному уравнению второго порядка относительно одной из искомых функций.

Пример 4.26.

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 9t, \\ y' = 2x + y + 4e^t. \end{cases}$$

Решение. Продифференцируем обе части первого уравнения и, исключив из полученного равенства y и y' , получим $x'' - 2x' - 3x = 8e^t + 9t - 9$. Для решения полученного неоднородного уравнения используем алгоритм из разд. 3.1.2.1.

1. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $x'' - 2x' - 3x = 0$. Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$ действительные: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, поэтому общее решение записывается в виде $x_0(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$.

2. Частное решение неоднородного уравнения найдем методом подбора, представив правую часть в виде суммы функций:

$$f(t) = 8e^t + 9t - 9 = f_1(t) + f_2(t).$$

Для уравнения с правой частью $f_1(t) = 8e^t$ частное решение подбираем в виде $x_{q1}(t) = Ae^t$. Подставляя его в уравнение $x'' - 2x' - 3x = 8e^t$, после сокращения на e^t находим: $A = -2$, поэтому $x_{q1}(t) = -2e^t$. Аналогично, для уравнения с правой частью $f_2(t) = 9t - 9$ решение подбираем в виде $x_{q2}(t) = At + B$ и, после подстановки его в уравнение $x'' - 2x' - 3x = 9t - 9$, находим: $A = -3$, $B = 5$, поэтому $x_{q2}(t) = -3t + 5$. В результате получаем $x_q(t) = x_{q1}(t) + x_{q2}(t) = -2e^t - 3t + 5$.

3. Общее решение неоднородного уравнения:

$$x(t) = x_0(t) + x_q(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + 5 - 3t - 2e^t.$$

Таким образом, найдена одна неизвестная функция $x(t)$, описываемая исходной системой. Другая неизвестная функция $y(t)$ определяется, например, из первого уравнения системы:

$$2y = x' - x + 9t = 2C_1 e^{3t} - 2C_2 e^{-t} + 12t - 8, \text{ то есть } y(t) = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} + 6t - 4.$$

Пример 4.27.

$$\begin{cases} x' = -y + 2t, \\ y' = x - 3. \end{cases}$$

Решение. Система приводится к дифференциальному уравнению относительно функции $x(t)$: $x'' = -x + 3 + 2$, $x'' + x = 5$. Общее решение однородного уравнения $x'' + x = 0$ имеет вид $x_0(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, а частное решение неоднородного: $x_q(t) = 5$. Поэтому $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 5$ - одна из искоемых функций, удовлетворяющих исходной системе. Выражение для неизвестной функции $y(t)$ определяем из первого уравнения системы: $y = 2t - x'$, то есть $y(t) = 2t \sin t - C_2 \cos t + 2t$.

Пример 4.28.

$$\begin{cases} x' = y + 1, \\ y' = -x - 2y. \end{cases}$$

Решение. Относительно функции $x(t)$ получаем уравнение $x'' + 2x' + x = 2$. Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ кратные: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, поэтому общее решение однородного уравнения записывается в виде $x_0(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$, а частным решением неоднородного уравнения, очевидно, является функция $x_q(t) = 2$. Таким образом, найдена одна из двух неизвестных функций: $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + 2$. Неизвестная функция $y(t)$ определяется из первого уравнения системы: $y = x' - 1$, то есть

$$y(t) = C_2 e^{-t} - C_2 t e^{-t} - C_1 e^{-t} - 1 = e^{-t} (C_2 - C_1 - C_2 t) - 1.$$

Пример 4.29.

$$\begin{cases} x' = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ y' = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

Решение. Дифференцируя первое уравнение и подставляя в него выражение для y' из второго, получаем уравнение относительно функции $x(t)$:

$x'' + x = \operatorname{tg} t + 2 \operatorname{tg} t \frac{1}{\cos^2 t}$. Правая часть этого уравнения не является функцией

специального вида, поэтому это уравнение будем решать методом вариации произвольных постоянных (см. разд. 3.1.2.2). Общее решение однородного уравнения $x'' + x = 0$ записывается как $x_0(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, а решение неоднородного уравнения подбираем в виде $x(t) = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t$. Функции $C_1(t), C_2(t)$ определяются после нахождения $C_1'(t), C_2'(t)$ из системы (3.10), которая в данном примере имеет вид

$$\begin{cases} C_1' \cos t + C_2' \sin t = 0, \\ -C_1' \sin t + C_2' \cos t = 2 \operatorname{tg} t \frac{1}{\cos^2 t} + \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

Решая эту алгебраическую относительно $C_1'(t), C_2'(t)$ систему по правилу Крамера или методом исключения (для чего достаточно умножить, например, обе части второго уравнения на $-\sin t$ и прибавить полученное равенство к первому уравнению, предварительно умноженному на $\cos t$), получаем:

$C_1'(t) = -\left(2 \operatorname{tg} t \frac{1}{\cos^2 t} + \operatorname{tg} t\right) \sin t = -\frac{\sin^2 t}{\cos t} - 2 \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}$. Подставляя $C_1'(t)$ в первое

уравнение, находим $C_2'(t) = \sin t + 2 \frac{\sin t}{\cos^2 t}$. Далее интегрируем $C_1'(t)$ и $C_2'(t)$,

применяя формулу $\int \frac{dt}{\cos^n t} = \frac{1}{n-1} \frac{\sin t}{\cos^{n-1} t} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dt}{\cos^{n-2} t}$:

$$\begin{aligned} C_1(t) &= -\int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt - 2 \int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t} dt = \\ &= -\int \frac{dt}{\cos t} + \int \cos t dt - 2 \int \frac{dt}{\cos^3 t} + 2 \int \frac{dt}{\cos t} = \sin t + \int \frac{dt}{\cos t} - 2 \int \frac{dt}{\cos^3 t} = \\ &= \sin t + \int \frac{dt}{\cos t} - \frac{\sin t}{\cos^3 t} - \int \frac{dt}{\cos t} = \sin t - \frac{\sin t}{\cos^2 t} + C_1 = -\frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} + C_1; \\ C_2(t) &= \int \sin t dt + 2 \int \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt = \frac{2}{\cos t} - \cos t + C_2. \end{aligned}$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения согласно замечанию 3.1 имеет вид

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \left(-\frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} + C_1\right) \cos t + \left(\frac{2}{\cos t} - \cos t + C_2\right) \sin t = \\
 &= C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{\sin t (1 - \cos^2 t)}{\cos t} - \sin t \cos t + 2 \operatorname{tg} t = \\
 &= C_1 \cos t + C_2 \sin t + \operatorname{tg} t.
 \end{aligned}$$

Функцию $y(t)$ находим из первого уравнения исходной системы $y = x' - \operatorname{tg}^2 t + 1$, то есть

$$y(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + 1 = C_2 \cos t - C_1 \sin t + 2.$$

Пример 4.30.

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = 4y - 5x + \frac{e^{2t}}{\cos t}. \end{cases}$$

Решение. Дифференцируя первое уравнение и подставляя в него выражения для x' и y' , получаем уравнение относительно функции $x(t)$:

$$x'' = 4x' - 5x + \frac{e^{2t}}{\cos t} \quad \text{или} \quad x'' - 4x' + 5x = \frac{e^{2t}}{\cos t}.$$

Общее решение этого уравнения найдено в примере 3.17 методом вариации произвольных постоянных:

$$x(t) = C_1 e^{2t} \cos t + C_2 e^{2t} \sin t + e^{2t} \cos t \ln |\cos t| + t e^{2t} \sin t.$$

Функцию $y(t)$ находим из первого уравнения исходной системы $y = x'$, то есть

$$\begin{aligned}
 y(t) &= e^{2t} (C_1 (2 \cos t - \sin t) + C_2 (2 \sin t + \cos t)) + \\
 &+ e^{2t} (2 \cos t - \sin t) \ln |\cos t| + t (2 \sin t + \cos t).
 \end{aligned}$$

В примерах 4.31, 4.32 найти общее решение системы третьего порядка методом приведения системы к одному уравнению третьего порядка.

Пример 4.31.

$$\begin{cases} x' = x - y + z + 2e^t, \\ y' = x + y - z + 3t^2, \\ z' = 2x - y + 2. \end{cases}$$

Решение. Продифференцировав обе части первого уравнения и подставив в полученное равенство выражения для y' и z' из двух других уравнений системы, находим

$$x'' = x' + x - 2y + z - 3t^2 + 2 + 2e^t.$$

Отсюда $z - 2y = x'' - x' - x + 3t^2 - 2 - 2e^t$. Кроме того, из первого уравнения следует: $z - y = x' - x - 2e^t$. Решая последние два уравнения как алгебраическую систему относительно y и z , находим выражения для $y(t)$ и $z(t)$ через $x(t)$: $y = -x'' + 2x' - 3t^2 + 2$, $z = -x'' + 3x' - x - 3t^2 + 2 - 2e^t$.

Продифференцируем выражение для x'' еще раз, подставляя в полученное равенство выражения для y' , z' из уравнений исходной системы:

$$\begin{aligned} x''' &= x'' + x' - 2(x + y - z + 3t^2) + (2x - y + 2) - 6t + 2e^t = \\ &= x'' + x' + (z - y) - (2y - z) - 6t^2 + 2 - 6t + 2e^t. \end{aligned}$$

Подставляя сюда найденные выше выражения для $(z - y)$ и $(2y - z)$, получаем

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = 2e^t - 6t - 3t^2 - 2e^t - 2e^t,$$

или

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = -3t^2 - 6t - 2e^t.$$

Таким образом, получено уравнение третьего порядка относительно одной из неизвестных функций исходной системы. Это уравнение решаем, следуя алгоритму из разд.3.1.2.3.

1. Общее решение соответствующего однородного уравнения найдено в примере 4.4: $x_0(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}$.

2. Частное решение неоднородного уравнения найдем методом подбора. Правую часть представим в виде $f(t) = -2e^t - 3t^2 - 6t = f_1(t) + f_2(t)$. Для уравнения с правой частью $f_1(t) = -2e^t$ частное решение подбираем в виде $x_{01}(t) = Ate^t$.

Подставляя $x_{01}(t)$, $x_{01}'(t) = e^t(At + A)$, $x_{01}''(t) = e^t(At + 2A)$, $x_{01}'''(t) = e^t(At + 3A)$ в уравнение $x''' - 2x'' - x' + 2x = -2e^t$, после сокращения на e^t , получаем $-2A = -2$, то есть $A = 1$ и $x_{01}(t) = te^t$.

Для уравнения с правой частью $f_2(t) = -3t^2 - 6t$ частное решение подбираем в виде $x_{02}(t) = At^2 + Bt + C$. Подставляя $x_{02}(t)$, $x_{02}' = 2At + B$, $x_{02}'' = 2A$, $x_{02}''' = 0$ в уравнение $x''' - 2x'' - x' + 2x = -3t^2 - 6t$, получаем

$$-4A - 2At - B + 2At^2 + 2Bt + 2C = -6t - 3t^2,$$

откуда $A = -\frac{3}{2}$, $B = -\frac{9}{2}$, $C = -\frac{1}{4}$, поэтому $x_{02}(t) = -\frac{3}{2}t^2 - \frac{9}{2}t - \frac{1}{4}$. Таким образом, найдено частное решение рассматриваемого уравнения:

$$x_0(t) = x_{01}(t) + x_{02}(t) = te^t - \frac{3}{2}(t^2 + 3t + \frac{1}{2}).$$

3. Записываем общее решение неоднородного уравнения:

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t} + te^t - \frac{3}{2}(t^2 + 3t + \frac{1}{2}).$$

Наконец, используя полученные выше равенства $y = -x'' + 2x' - 3t^2 + 2$, $z = -x'' + 3x' - x - 3t^2 + 2 - 2e^t$, находим функции $y(t)$ и $z(t)$:

$$\begin{aligned}x(t) &= C_1 e^t - 3C_2 e^{-t} + te^t - 3t^2 - 6t - 4, \\z(t) &= C_1 e^t - 5C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t} - e^t + te^t - \frac{3}{2}t^2 - \frac{9}{2}t - \frac{13}{4}.\end{aligned}$$

Пример 4.32.

$$\begin{cases}x' = 2x - y + 2z + 1, \\y' = x + 2z - t, \\z' = -2x + y - z + \sin t.\end{cases}$$

Решение. Продифференцировав обе части третьего уравнения и подставив в полученное равенство выражения для x' и y' из двух других уравнений системы, получим $z'' + z' + 2z = (y - 2x) + (y - x) - 2 - t + \cos t$. Используя третье уравнение, заменим разность $(y - 2x)$ на $(z' + z - \sin t)$. Продифференцируем последнее равенство и исключим x' и y' : $z''' + z' = y' - x' - \cos t - \sin t - 1$. Из первых двух уравнений системы следует: $y' - x' = y - x - t - 1$. Исключая из трех последних уравнений $(y - x)$ и $(y' - x')$, получаем уравнение третьего порядка относительно неизвестной функции $z(t)$: $z''' - z'' + z' - z = -2 \cos t$.

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \pm i$, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $z_0(t) = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t$. Частное решение неоднородного уравнения подбирается в виде $z_*(t) = (A \sin t + B \cos t)t$. Подставляя $z_*(t)$,

$$\begin{aligned}z'_*(t) &= At \cos t + A \sin t - Bt \sin t + B \cos t, \\z''_*(t) &= -At \sin t + 2A \cos t - Bt \cos t - 2B \sin t, \\z'''_*(t) &= -At \cos t - 3A \sin t + Bt \sin t - 3B \cos t\end{aligned}$$

в неоднородное уравнение, получаем

$$-2A \sin t - 2B \cos t - 2A \cos t + 2B \sin t = -2 \cos t,$$

откуда находим $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, поэтому $z_*(t) = \frac{1}{2}t(\sin t + \cos t)$. Таким образом, найдена функция $z(t)$:

$$z(t) = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t + \frac{1}{2}t(\sin t + \cos t).$$

Для определения других двух неизвестных функций $x(t)$ и $y(t)$ используем полученные выше уравнения:

$$z'' + z + 2 + \sin t + t - \cos t = y - x \quad \text{и} \quad z' + z - \sin t = y - 2x.$$

Выражаем x и y :

$$x = z'' - z' + 2 + 2 \sin t + t - \cos t, \quad y = 2z'' - z' + 3 \sin t + 2t - 2 \cos t + 4 + z.$$

Подставляя в последние два равенства выражения для $z(t)$, $z'(t)$, $z''(t)$, окончательно имеем

$$\begin{aligned}x(t) &= (C_2 - C_3 + \frac{1}{2}) \sin t - (C_2 + C_3 + \frac{1}{2}) \cos t + t + 2 - t \cos t, \\y(t) &= 2C_1 e^t + (C_2 - C_3 + \frac{1}{2}) \sin t - (C_2 + C_3 + \frac{1}{2} + t) \cos t + 2t + 4.\end{aligned}$$

Из приведенных примеров видно, что применение рассмотренного метода представляет определенные трудности, которые связаны не только с решением получаемого в результате дифференциального уравнения относительно одной из неизвестных функций системы, но в большей степени с самой процедурой получения такого уравнения, которая требует определенных навыков. С другой стороны, анализ решения рассмотренных примеров позволяет сделать следующий вывод. Если функция $F(t)$ в системе $X' = AX + F(t)$ включает многочлены и функции $e^{\alpha t}$, $\sin \beta t$, $\cos \beta t$, то получаемое дифференциальное уравнение относительно одной из функций будет неоднородным уравнением с правой частью специального вида. Значит, для решения таких неоднородных систем можно применять метод подбора, аналогичный рассмотренному в разд. 3.1.2.1 для уравнений. Кроме того, при исследовании однородных систем было замечено, что характеристические уравнения для системы и для уравнения, к которому она приводится, совпадают, а следовательно, совпадают и их корни. Этот факт подтверждает аналогию в решении систем и уравнений.

4.2.2. Метод подбора частного решения

Как отмечалось выше, для нахождения общего решения линейной неоднородной системы кроме общего решения соответствующей ей однородной системы, правила нахождения которого рассмотрены в разд. 4.1, нужно знать какое-либо частное решение неоднородной системы (4.1):

$$X' = AX + F(t). \quad (4.13)$$

Одним из методов нахождения частного решения линейной неоднородной системы является метод подбора или, иначе, метод неопределенных коэффициентов. Применение этого метода возможно в том случае, когда входящая в систему вектор-функция $F(t)$ является функцией специального вида. Имеет место следующее правило, аналогичное изложенному в разд. 3.2.1 для линейных неоднородных уравнений.

П р а в и л о 4.5. Пусть вектор-функция $F(t)$ имеет вид

$$F(t) = e^{\alpha t} [R_q(t) \cos \beta t + P_l(t) \sin \beta t], \quad (4.14)$$

где α, β - заданные действительные числа, $R_q(t)$, $P_l(t)$ - вектор-функции, компонентами которых являются многочлены переменной t , степени которых равны или меньше q и l соответственно. Частное решение неоднородной системы (4.13) в этом случае ищется в виде

$$X_k(t) = e^{\alpha t} [Q_{m+s}(t) \cos \beta t + T_{m+s}(t) \sin \beta t], \quad (4.15)$$

где $m = \max(q, l)$,

$$s = \begin{cases} 0, & \text{если число } \alpha + j\beta \text{ не совпадает ни с одним} \\ & \text{из корней характеристического уравнения (4.5),} \\ k, & \text{если число } \alpha + j\beta \text{ совпадает с корнем кратности } k; \end{cases}$$

$Q_{m+s}(t)$, $T_{m+s}(t)$ - вектор-функции, компонентами которых являются многочлены степени $m+s$ с неопределенными коэффициентами.

Алгоритм нахождения частного решения неоднородной системы методом подбора

1. Найти собственные значения матрицы A - корни характеристического уравнения (4.5).
2. Определить параметры α, β, q, l вектор-функции $F(t)$ вида (4.14).
3. Выписать структуру частного решения (4.15) с неопределенными коэффициентами.
4. Подставить полученное выражение в систему и найти значения неопределенных коэффициентов, приравнявая выражения при одинаковых функциях переменной t .

З а м е ч а н и е 4.4. Если $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$, то $X_q(t) = X_{q1}(t) + X_{q2}(t)$, где $X_{q1}(t)$ - частное решение системы $X' = AX + F_1(t)$, $X_{q2}(t)$ - частное решение системы $X' = AX + F_2(t)$.

Пример 4.33. Найти частное решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} x' = y + 1, \\ y' = -x - 2y. \end{cases}$$

Решение. 1. Выписываем характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$

находим его корни: $\lambda_{1,2} = -1$ кратности 2.

2. Выписываем вектор-функцию $F(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и параметры в соответствии с (4.14): $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $q = 0$, $l = 0$.

3. Структуру частного решения (4.15) выписываем с учетом того, что $s = 0$, так как числа $\alpha + \beta = 0$ нет среди корней характеристического уравнения, и $m = \max(q, l) = 0$:

$$X_q(t) = Q_0(t) = a, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

4. Подставляя $X_q(t)$ и $X'_q(t) = (0, 0)^T$ в систему $X' = AX + F(t)$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, получаем

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $a_2 + 1 = 0$, $-2a_2 - a_1 = 0$, то есть $a_1 = 2$, $a_2 = -1$ и $X_q(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Пример 4.34. Найти частное решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} x' = -y + 2t, \\ y' = x - 3. \end{cases}$$

Решение. 1. Выписываем характеристическое уравнение: $\det(A - \lambda E) = 0$, находим его корни: $\lambda_{1,2} = \pm i$ (см. пример 4.3).

2. Выписываем вектор-функцию $F(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -3 \end{pmatrix}$ и ее параметры в соответствии с (4.14): $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $q = 1$, $l = 0$.

3. Структуру частного решения (4.15) выписываем с учетом того, что $s = 0$, так как числа $\alpha + \beta = 0$ нет среди корней характеристического уравнения, и $m = \max(q, l) = 1$:

$$X_q(t) = Q_1(t) = at + b = \begin{pmatrix} a_1 t \\ a_2 t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

4. Подставляя $X_q(t)$ и $X_q'(t) = (a_1, a_2)^T$ в систему $X' = AX + F(t)$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, получаем

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Выполнив умножение, получаем два уравнения:

$$a_1 = -a_2 t - b_2 + 2t, \quad a_2 = a_1 t + b_1 - 3.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях от t , имеем: $-a_2 + 2 = 0$, $a_1 = 0$, $a_1 = -b_2$, $a_2 = b_1 - 3$, то есть $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $b_1 = 5$, $b_2 = 0$, следовательно,

$$X_q(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Пример 4.35. Найти частное решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} x' = -2x - y + \sin t, \\ y' = 4x + 2y + \cos t. \end{cases}$$

Решение. 1. Выписываем характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & -1 \\ 4 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0,$$

находим его корень: $\lambda_{1,2} = 0$ кратности 2.

2. Выписываем вектор-функцию $F(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t$ и определяем параметры в соответствии с (4.14):

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad q = 0, \quad l = 0.$$

3. Структуру частного решения (4.15) выписываем с учетом того, что $s = 0$, так как числа $\alpha + i\beta = i$ нет среди корней характеристического уравнения, и $m = \max(q, l) = 0$:

$$X_q(t) = a \cos t + b \sin t = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \sin t.$$

4. Подставляя $X_q(t)$ и $X_q'(t) = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cos t$ в систему $x' = AX + F(t)$,

где $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, получаем

$$\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cos t = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \cos t + b_1 \sin t \\ a_2 \cos t + b_2 \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Выполняя умножение и приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях переменной t , имеем

$$-2a_1 - a_2 - b_1 = 0, \quad 4a_1 + 2a_2 - b_2 = -1, \quad -2b_1 - b_2 + a_1 = -1, \quad 4b_1 + 2b_2 + a_2 = 0.$$

Решая эти уравнения, находим $a_1 = 0$, $a_2 = -2$, $b_1 = 2$, $b_2 = -3$ и, поэтому

$$X_q(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \sin t, \text{ или } x_q(t) = 2 \sin t, \quad y_q(t) = -2 \cos t - 3 \sin t.$$

Пример 4.36. Найти частное решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = -x + 2y - 5e^t \sin t. \end{cases}$$

Решение. 1. Выписываем характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

находим его корни: $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$.

2. Выписываем вектор-функцию $F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5e^t \sin t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} \sin t$ и ее параметры в соответствии с (4.14):

$$\alpha = 1, \beta = 1, q = 0, l = 0.$$

3. Структуру частного решения (4.15) выписываем с учетом того, что $s = 0$, так как числа $\alpha + i\beta = 1 + i$ нет среди корней характеристического уравнения, и $m = \max(q, l) = 0$:

$$X_q(t) = e^t (a \cos t + b \sin t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^t \cos t + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^t \sin t.$$

4. Подставляя $X(t)$ и $X'(t) = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} e^t \sin t + \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} e^t \cos t$ в систему $X' = AX + F(t)$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, после сокращения на e^t получаем

$$\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \cos t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \cos t + b_1 \sin t \\ a_2 \cos t + b_2 \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \sin t \end{pmatrix}.$$

Выполняя умножение и приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях переменной t , имеем

$$a_1 - a_2 - b_1 = 0, \quad -a_1 + a_2 - b_2 = 0, \quad b_1 - b_2 + a_1 = 0, \quad -b_1 + b_2 + a_2 = 5,$$

откуда $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $b_1 = -1$, $b_2 = 1$ и, следовательно,

$$X_q(t) = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cos t + e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t, \text{ или}$$

$$x_q(t) = e^t (2 \cos t - \sin t), \quad y_q(t) = e^t (3 \cos t + \sin t).$$

Пример 4.37. Найти частное решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x + 2e^t. \end{cases}$$

Решение. 1. Выписываем характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

находим его корень: $\lambda_{1,2} = 1$ кратности 2.

2. Выписываем вектор-функцию $F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^t \end{pmatrix}$ и ее параметры в соответствии с (4.14): $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $q = 0$, $l = 0$.

3. Структуру частного решения (4.15) выписываем с учетом того, что $s = 2$, так как число $\alpha + i\beta = 1$ является корнем характеристического уравнения кратности 2, и $m = \max(q, l) = 0$:

$$X_q(t) = e^t (at^2 + bt + c) = e^t \begin{pmatrix} a_1 t^2 + b_1 t + c_1 \\ a_2 t^2 + b_2 t + c_2 \end{pmatrix}.$$

4. Подставляя $X_q(t)$ и $X'_q(t) = e^t \begin{pmatrix} a_1 t^2 + b_1 t + c_1 + 2a_1 t + b_1 \\ a_2 t^2 + b_2 t + c_2 + 2a_2 t + b_2 \end{pmatrix}$ в систему $X' = AX + F(t)$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, после сокращения на e^t получаем

$$\begin{pmatrix} a_1 t^2 + b_1 t + c_1 + 2a_1 t + b_1 \\ a_2 t^2 + b_2 t + c_2 + 2a_2 t + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 t^2 + b_1 t + c_1 \\ a_2 t^2 + b_2 t + c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Выполняя умножение и приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях переменной t , получаем шесть уравнений: $2a_1 - a_2 = a_1$, $a_1 = a_2$, $2b_1 - b_2 = b_1 + 2a_1$, $b_1 = b_2 + 2a_2$, $2c_1 - c_2 = b_1 + c_1$, $c_1 + 2 = b_2 + c_2$. Среди этих уравнений независимыми являются только три:

$$a_1 = a_2, \quad 2b_1 - b_2 = b_1 + 2a_1, \quad 2c_1 - c_2 = b_1 + c_1.$$

Эта система имеет бесконечное множество решений. Для получения любого ее решения достаточно произвольно задать значения трех неизвестных, а оставшиеся найти из системы. Например, если $a_1 = -1$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0$, то $a_2 = -1$, $b_2 = 2$, $c_2 = 0$. Тогда $X_q(t) = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} t^2 + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} t$.

Пример 4.38. Найти частное решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 9t, \\ y' = 2x + y + 4e^t. \end{cases}$$

Решение. 1. Выписываем характеристическое уравнение: $\det(A - \lambda E) = 0$, находим его корни: $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = -1$ (см. пример 4.2).

2. Вектор-функцию $F(t) = \begin{pmatrix} -9t \\ 4e^t \end{pmatrix}$ представим в виде суммы:

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) = \begin{pmatrix} -9t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4e^t \end{pmatrix}.$$

где $F_1(t) = \begin{pmatrix} -9t \\ 0 \end{pmatrix}$ и $F_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4e^t \end{pmatrix}$. Для каждой из функций $F_1(t)$, $F_2(t)$ определяем параметры:

а) для $F_1(t)$ параметры из (4.14): $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $q = 1$, $l = 0$;

б) для $F_2(t)$ параметры из (4.14): $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $q = 0$, $l = 0$.

3. Частное решение исходной системы согласно замечанию 4.4 определяется в виде суммы: $X_q(t) = X_{q1}(t) + X_{q2}(t)$, где $X_{qi}(t)$ является решением уравнения $X' = AX + F_i(t)$, $i = 1, 2$. Структуру частного решения $X_{q1}(t)$ выписываем с учетом того, что $s = 0$, так как число $\alpha + \beta = 0$ не является корнем характеристического уравнения, и $m = \max(q, l) = 1$:

$$X_{q1}(t) = at + b = \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix}.$$

Структуру частного решения $X_{q2}(t)$ выписываем с учетом того, что $s = 0$, так как число $\alpha + \beta = 1$ не является корнем характеристического уравнения, и $m = \max(q, l) = 0$:

$$X_{q2}(t) = ce^t = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^t.$$

Таким образом, частное решение исходной системы подбирается в виде

$$X_4(t) = X_{41}(t) + X_{42}(t) = \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 + c_1 e^t \\ a_2 t + b_2 + c_2 e^t \end{pmatrix}.$$

4. Подставляя $X_4(t)$ и $X_4'(t) = \begin{pmatrix} a_1 + c_1 e^t \\ a_2 + c_2 e^t \end{pmatrix}$ в систему $X' = AX + F(t)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ получаем } \begin{pmatrix} a_1 + c_1 e^t \\ a_2 + c_2 e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 + c_1 e^t \\ a_2 t + b_2 + c_2 e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9t \\ 4e^t \end{pmatrix}$$

Выполняя умножение и приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях t , получаем шесть уравнений:

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 - 9 &= 0, & 2a_1 + a_2 &= 0, & b_1 + 2b_2 &= a_1, \\ 2b_1 + b_2 &= a_2, & c_1 + 2c_2 &= c_1, & 2c_1 + c_2 + 4 &= c_2, \end{aligned}$$

откуда $a_1 = -3$, $a_2 = 6$, $b_1 = 5$, $b_2 = -4$, $c_1 = -2$, $c_2 = 0$. В результате получаем

$$\text{частное решение: } X_4(t) = \begin{pmatrix} 5 - 3t - 2e^t \\ 6t - 4 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.39. Найти частное решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} x' = x - y + z + 2e^t, \\ y' = x + y - z + 3t^2, \\ z' = 2x - y + 2. \end{cases}$$

Решение. 1. Выписываем характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0,$$

находим его корни: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ и $\lambda_3 = 2$.

2. Вектор-функцию $F(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 3t^2 \\ 2 \end{pmatrix}$ представим в виде суммы:

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3t^2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

где $F_1(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $F_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3t^2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Для каждой из функций $F_1(t)$, $F_2(t)$ определяем

параметры:

а) для $F_1(t)$ параметры из (4.14): $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $q = 0$, $l = 0$;

б) для $F_2(t)$ параметры из (4.14): $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $q = 2$, $l = 0$.

3. Частное решение исходной системы согласно замечанию 4.4 определяется в виде суммы: $X_4(t) = X_{41}(t) + X_{42}(t)$, где $X_{41}(t)$ соответствует функции

$F_1(t)$. Структуру частного решения $X_{q1}(t)$ выписываем с учетом того, что $s = 1$, так как число $\alpha + \beta = 1$ является корнем характеристического уравнения кратности 1, и $m = \max(q, l) = 0$:

$$X_{q1}(t) = e^t(at + b) = e^t \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \\ a_3 t + b_3 \end{pmatrix}.$$

Структуру частного решения $X_{q2}(t)$ выписываем с учетом того, что $s = 0$, так как число $\alpha + \beta = 0$ не является корнем характеристического уравнения, и $m = \max(q, l) = 2$:

$$X_{q2}(t) = ct^2 + dt + f = \begin{pmatrix} c_1 t^2 + d_1 t + f_1 \\ c_2 t^2 + d_2 t + f_2 \\ c_3 t^2 + d_3 t + f_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, частное решение исходной системы подбирается в виде

$$X_q(t) = X_{q1}(t) + X_{q2}(t) = e^t \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \\ a_3 t + b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 t^2 + d_1 t + f_1 \\ c_2 t^2 + d_2 t + f_2 \\ c_3 t^2 + d_3 t + f_3 \end{pmatrix}.$$

4. Подставляя $X_q(t)$ и $X_q'(t) = e^t \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 + a_1 \\ a_2 t + b_2 + a_2 \\ a_3 t + b_3 + a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c_1 t + d_1 \\ 2c_2 t + d_2 \\ 2c_3 t + d_3 \end{pmatrix}$ в систему

$$X' = AX + F(t), \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ получаем}$$

$$e^t \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 + a_1 \\ a_2 t + b_2 + a_2 \\ a_3 t + b_3 + a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c_1 t + d_1 \\ 2c_2 t + d_2 \\ 2c_3 t + d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \\ a_3 t + b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 t^2 + d_1 t + f_1 \\ c_2 t^2 + d_2 t + f_2 \\ c_3 t^2 + d_3 t + f_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^t \\ 3t^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выполняя операции с матрицами и приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях t , получаем систему:

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 + a_3 &= a_1, & a_1 + a_2 - a_3 &= a_2, & 2a_1 - a_2 &= a_3, & b_3 - b_2 &= a_1 - 2, & b_1 - b_3 &= a_2, \\ 2b_1 - b_2 - b_3 &= a_3, & c_1 - c_2 + c_3 &= 0, & c_1 + c_2 - c_3 + 3 &= 0, & 2c_1 - c_2 &= 0, \\ d_1 - d_2 + d_3 &= 2c_1, & d_1 + d_2 - d_3 &= 2c_2, & 2d_1 - d_2 &= 2c_3, & f_1 - f_2 + f_3 &= d_1, \\ f_1 + f_2 - f_3 &= d_2, & 2f_1 - f_2 + 2 &= d_3. \end{aligned}$$

Из этой системы находим $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $b_1 = b_2$, $b_3 = b_1 - 1$, $c_1 = -\frac{3}{2}$, $c_2 = -3$, $c_3 = -\frac{1}{2}$, $d_1 = -\frac{3}{2}$, $d_2 = -6$, $d_3 = -\frac{3}{2}$, $f_1 = -\frac{21}{4}$, $f_2 = -4$, $f_3 = -\frac{13}{4}$. Полагая $b_1 = 0$, получаем одно из решений алгебраической системы и искомое частное решение:

$$X_q(t) = e^t \begin{pmatrix} t \\ t \\ t-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}(t^2 + 3t + \frac{7}{2}) \\ -3t^2 - 6t - 4 \\ -\frac{3}{2}(t^2 + 3t + \frac{13}{6}) \end{pmatrix}.$$

4.2.3. Метод вариации произвольных постоянных

Идея этого метода решения линейных неоднородных систем та же, что в случае уравнений высших порядков (см. разд.3.1.2.2), а именно если общее

решение однородной системы $X' = AX$ имеет вид $X_0(t) = \sum_{i=1}^n C_i X_i(t)$, то решение

неоднородной системы $X' = AX + F(t)$ подбирается в виде $X(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) X_i(t)$,

где $X_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ - фундаментальная система решений однородной системы, а $C_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ - функции, которые требуется определить. Дифференцируя $X(t)$ и подставляя полученные производные в систему, получаем матричное равенство:

$$\sum_{i=1}^n C_i'(t) X_i(t) + \sum_{i=1}^n C_i(t) X_i'(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) A X_i(t) + F(t),$$

которое в силу того, что $X_i' = A X_i$, $i = 1, \dots, n$, можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^n C_i'(t) X_i(t) = F(t). \quad (4.16)$$

Таким образом, для того чтобы $X(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) X_i(t)$ было решением неоднородной системы, функции $C_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, должны удовлетворять системе уравнений (4.16).

Алгоритм нахождения частного решения неоднородной системы методом вариации произвольных постоянных

1. Записать однородную систему, соответствующую данной неоднородной, и найти функции $X_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, образующие ее фундаментальную систему решений.

2. Выписать систему уравнений (4.16) и решить ее относительно функций $C_i'(t)$, $i = 1, \dots, n$, как линейную алгебраическую систему.

3. Найти функции $C_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, проинтегрировав полученные в п.2 функции $C'_i(t)$. Возникающие при интегрировании произвольные постоянные положить равными нулю.

4. Записать частное решение неоднородной системы в виде

$$X(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) X_i(t). \quad (4.17)$$

З а м е ч а н и е 4.5.

1. Если при нахождении функций $C_i(t)$ записывать всю совокупность первообразных (то есть не полагать возникающие при интегрировании произвольные постоянные равными нулю, а сохранять их в записи выражений для $C_i(t)$), то (4.17) будет общим решением неоднородной системы.

2. Описанный метод позволяет находить решения систем для более широкого класса функций $F(t)$, чем метод подбора.

Пример 4.40. Найти частное решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} x' = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ y' = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

Решение. 1. Записываем однородную систему: $\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x, \end{cases}$ и решаем ее:

а) здесь матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) выписываем характеристическое уравнение: $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$, и находим его корни: $\lambda_{1,2} = \pm i$ - комплексные сопряженные числа. Для $h = (h_1, h_2)^T$ из системы $(A - \lambda_1 E)h = 0$ или $\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$, получаем $h_2 = ih_1$. В результате находим собственный вектор $h = (1, i)^T$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = i$;

в) фундаментальную систему решений (см. правило 4.2 из разд.4.1.1) составляют векторы: $X_1(t) = \operatorname{Re} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$, $X_2(t) = \operatorname{Im} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$.

2. Выписываем систему (4.16) для нахождения $C_1'(t)$ и $C_2'(t)$:

$$\begin{cases} C_1' \cos t + C_2' \sin t = \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ -C_1' \sin t + C_2' \cos t = \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

Решение этой системы можно получить, например, по правилу Крамера или умножая обе части первого уравнения на $\cos t$, а второго - на $-\sin t$ и складывая результаты. Получим $C_1' = \cos t (\operatorname{tg}^2 t - 1) - \sin t \operatorname{tg} t = -\cos t$. Подставляя полученное выражение для $C_1'(t)$ в первое уравнение, находим

$$C_2'(t) = \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}.$$

3. Интегрируя, находим функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$:

$$C_1(t) = - \int \cos t \, dt = -\sin t + C_1,$$

$$C_2(t) = \int \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} \, dt = - \int \frac{(1 - \cos^2 t) \, d \cos t}{\cos^2 t} = - \int \frac{d \cos t}{\cos^2 t} + \int d \cos t = \frac{1}{\cos t} + \cos t + C_2,$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

4. Полагая C_1, C_2 равными нулю, получаем частное решение (4.17) заданной системы:

$$X_q(t) = -\sin t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \left(\cos t + \frac{1}{\cos t} \right) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad x_q(t) = \operatorname{tg} t, \quad y_q(t) = 2.$$

Заметим, что если произвольные постоянные не полагать равными нулю, а сохранить в выражениях для $C_1(t), C_2(t)$, то получится общее решение неоднородной системы:

$$X(t) = (-\sin t + C_1) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \left(\cos t + \frac{1}{\cos t} + C_2 \right) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

или $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \operatorname{tg} t$, $y(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2$, совпадающее с найденным в примере 4.29.

Пример 4.41. Найти общее решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = 4y - 5x + \frac{e^{2t}}{\cos t}. \end{cases}$$

Решение. 1. Записываем однородную систему: $\begin{cases} x' = y, \\ y' = 4y - 5x \end{cases}$ и решаем ее;

а) здесь матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$;

б) выписываем характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -5 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

и находим корни: $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ - комплексные сопряженные числа. Для

$h = (h_1, h_2)^T$ из системы $(A - \lambda_1 E)h = 0$ или $\begin{pmatrix} -2 - i & 1 \\ -5 & 2 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$ получаем

$h_2 = (2 + i)h_1$. В результате находим собственный вектор $h = (1, 2 + i)^T$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 2 + i$;

в) фундаментальную систему решений (см. правило 4.2 из разд. 4.1.1) составляют векторы:

$$X_1(t) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2+i} \right) e^{(2+i)t} = e^{2t} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2+i} \right) (\cos t + i \sin t) = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 \cos t - \sin t \end{pmatrix},$$

$$X_2(t) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{2+i} \right) e^{(2+i)t} = e^{2t} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{2+i} \right) (\cos t + i \sin t) = e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ 2 \sin t + \cos t \end{pmatrix}.$$

2. Выписываем систему (4.16) для нахождения $C_1'(t)$ и $C_2'(t)$:

$$\begin{cases} C_1' e^{2t} \cos t + C_2' e^{2t} \sin t = 0, \\ C_1' e^{2t} (2 \cos t - \sin t) + C_2' e^{2t} (2 \sin t + \cos t) = \frac{e^{2t}}{\cos t}. \end{cases}$$

После сокращения на e^{2t} систему перепишем в виде

$$\begin{cases} C_1' \cos t + C_2' \sin t = 0, \\ C_1' (2 \cos t - \sin t) + C_2' (2 \sin t + \cos t) = \frac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

Отсюда $C_1'(t) = -\operatorname{tg} t$, $C_2'(t) = 1$ - решение этой системы.

3. Интегрируя, находим функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$:

$$C_1(t) = -\int \operatorname{tg} t \, dt = \ln |\cos t| + C_1, \quad C_2(t) = \int dt = t + C_2,$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

4. Искомое общее решение получаем, подставляя в (4.17) найденные выражения для $C_1(t), C_2(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{2t} (C_1 + \ln |\cos t|) \cos t + e^{2t} (C_2 + t) \sin t = \\ &= e^{2t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t + \cos t \ln |\cos t| + t \sin t), \\ y(t) &= e^{2t} (C_1 + \ln |\cos t|) (2 \cos t - \sin t) + e^{2t} (C_2 + t) (2 \sin t + \cos t) = \\ &= e^{2t} (C_1 (2 \cos t - \sin t) + C_2 (2 \sin t + \cos t) + (2 \cos t - \sin t) \ln |\cos t| + t (2 \sin t + \cos t)). \end{aligned}$$

Заметим, что, положив C_1, C_2 равными нулю, можно получить частное решение системы.

Пример 4.42. Найти общее решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 9t, \\ y' = 2x + y + 4e^t. \end{cases}$$

Решение. 1. Записываем однородную систему: $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$ Ее общее решение, найденное в примере 4.2, имеет вид

$$X_0(t) = C_1 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t),$$

где $X_1(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$, $X_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$ - элементы фундаментальной системы решений.

2. Выписываем систему (4.16) для нахождения $C_1'(t)$ и $C_2'(t)$:

$$\begin{cases} C_1'e^{3t} + C_2'e^{-t} = -9t, \\ C_1'e^{3t} - C_2'e^{-t} = 4e^t. \end{cases}$$

Складывая и вычитая почленно эти равенства, находим

$$C_1'(t) = 2e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-3t}, \quad C_2'(t) = -2e^{2t} - \frac{1}{2}te^t.$$

3. Интегрируя, находим функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$:

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \int 2e^{-2t} dt - \frac{1}{2} \int te^{-3t} dt = -e^{-2t} - \frac{1}{2} \left(t \frac{e^{-3t}}{-3} - \frac{e^{-3t}}{9} \right) + C_1 = \\ &= \frac{3}{2}te^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-3t} - e^{-2t} + C_1, \end{aligned}$$

$$C_2(t) = - \int 2e^{2t} dt - \frac{1}{2} \int te^t dt = -e^{2t} - \frac{1}{2}(te^t - e^t) + C_2 = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}te^t - e^{2t} + C_2,$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

4. Искомое общее решение получаем, подставляя в (4.17) найденные выражения для $C_1(t), C_2(t)$:

$$\begin{aligned} X(t) &= \left(\frac{3}{2}te^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-3t} - e^{-2t} + C_1 \right) \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}te^t - e^{2t} + C_2 \right) \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \\ &= C_1 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 - 3t - 2e^t \\ 6t - 4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

или $X(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + (5 - 3t - 2e^t)$, $Y(t) = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} + (6t - 4)$. Отметим, что ответ совпадает с полученным в примере 4.2.6 и результат представляется в виде $X(t) = X_0(t) + X_*(t)$, где $X_0(t)$ - общее решение однородной системы, а $X_*(t)$ - частное решение, которое получается при $C_1 = C_2 = 0$.

4.2.4. Решение задачи Коши. Анализ выходных процессов

Задача Коши для неоднородных систем является частным случаем задачи (1.18) и имеет вид

$$X' = AX + F(t), \quad X(t_0) = X_0. \quad (4.18)$$

Теорема 1.5 и алгоритмы, изложенные в разд. 4.1.1, 4.2.2, 4.2.3, позволяют предложить общий алгоритм решения задачи (4.18) в следующем виде.

Алгоритм решения задачи Коши для линейных неоднородных систем

1. Выписать однородную систему $X' = AX$, соответствующую заданной неоднородной. Найти ее общее решение $X_0(t)$, используя алгоритм из разд. 4.1.1.
2. Найти частное решение $X_*(t)$ неоднородной системы, используя либо метод подбора (см. алгоритм из разд. 4.2.2), либо метод вариации произвольных постоянных (см. алгоритм из разд. 4.2.3).
3. Записать общее решение в виде суммы: $X(t) = X_0(t) + X_*(t)$.
4. Найти частное решение неоднородной системы, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Пример 4.43. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 9t, & x(0) = 1, \\ y' = 2x + y + 4e^t, & y(0) = 2. \end{cases}$$

Решение. 1. Общее решение однородной системы найдено в примере 4.2 и имеет вид

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} \\ C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

2. Частное решение неоднородной системы найдено в примере 4.38 методом подбора и имеет вид

$$X_*(t) = \begin{pmatrix} 5 - 3t - 2e^t \\ 6t - 4 \end{pmatrix}.$$

3. Общее решение неоднородной системы имеет вид

$$X(t) = X_0(t) + X_*(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + 5 - 3t - 2e^t \\ C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} + 6t - 4 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что это решение совпадает с полученным в примере 4.42 методом вариации произвольных постоянных.

4. Используя начальные условия, получаем систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 3 = 1, \\ C_1 - C_2 - 4 = 2, \end{cases}$$

из которой находим $C_1 = 2$, $C_2 = -4$. Следовательно, решение рассматриваемой задачи Коши имеет вид

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2e^{3t} - 4e^{-t} + 5 - 3t - 2e^t \\ 2e^{3t} + 4e^{-t} + 6t - 4 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.44. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} x' = y + 1, & x(0) = 3, \\ y' = -x - 2y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Решение. 1. Общее решение однородной системы найдено в примере 4.1 и имеет вид

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} \\ -C_1 e^{-t} + C_2 (1-t) e^{-t} \end{pmatrix}.$$

2. Частное решение неоднородной системы найдено в примере 4.33:

$$X_q(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Общее решение неоднородной системы:

$$X(t) = X_0(t) + X_q(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + 2 \\ -C_1 e^{-t} + C_2 (1-t) e^{-t} - 1 \end{pmatrix}.$$

4. Используя начальные условия, получаем систему

$$\begin{cases} C_1 + 2 = 3, \\ -C_1 + C_2 - 1 = 1, \end{cases}$$

из которой находим $C_1 = 1$, $C_2 = 3$. Следовательно, решение рассматриваемой задачи Коши имеет вид

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} + 3t e^{-t} + 2 \\ -e^{-t} + 3(1-t) e^{-t} - 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.45. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} x' = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, & x(0) = 1, \\ y' = -x + \operatorname{tg} t, & y(0) = 3. \end{cases}$$

Решение. 1. В примере 4.40 была найдена фундаментальная система решений соответствующей однородной системы, поэтому общее решение однородной системы может быть записано в виде

$$X_0(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ -C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{pmatrix}.$$

2. Частное решение неоднородной системы найдено в примере 4.40:

$$X_q(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{tg} t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Общее решение неоднородной системы:

$$X(t) = X_0(t) + X_q(t) = \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t + \operatorname{tg} t \\ -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2 \end{pmatrix}.$$

4. Используя начальные условия, получаем систему

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 + 2 = 3, \end{cases}$$

из которой находим $C_1 = 1$, $C_2 = 1$. Следовательно, решение рассматриваемой задачи Коши имеет вид

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t + \operatorname{tg} t \\ -\sin t + \cos t + 2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь решение задачи анализа выходных процессов (1.31)-(1.33):

$$\begin{aligned} X' &= A(t)X + B(t)G(t), \quad X(t_0) = X_0, \\ Y(t) &= C(t)X, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где требуется определить поведение вектора состояния $X(t)$ и выходного сигнала $Y(t)$ (реакцию динамической системы на входной сигнал $G(t)$).

Решение рассматриваемой задачи может быть получено с помощью метода вариации произвольных постоянных в удобной форме.

Запишем общее решение линейной однородной системы (1.16) в виде, аналогичном (4.7):

$$X_0(t) = \Phi(t)C,$$

где $\Phi(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ - фундаментальная матрица, столбцами которой являются элементы $X_1(t), \dots, X_n(t)$ фундаментальной системы решений, $C = (C_1, \dots, C_n)^T$ - вектор произвольных постоянных. Согласно методу вариации произвольных постоянных решение неоднородной системы ищется в форме

$$X(t) = \Phi(t)C(t),$$

где $C(t) = (C_1(t), \dots, C_n(t))^T$ - вектор неизвестных функций.

Подставляя последнее выражение в (4.19) и учитывая равенство $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, которое следует из того, что каждый столбец матрицы $\Phi(t)$ является решением однородной системы, получаем

$$A(t)\Phi(t)C(t) + \Phi(t)C'(t) = A(t)\Phi(t)C(t) + B(t)G(t),$$

или $C'(t) = \Phi^{-1}(t)B(t)G(t)$. Интегрируя, находим

$$C(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)G(\tau) d\tau + C_1.$$

Поэтому общее решение $X(t) = \Phi(t)C(t)$ неоднородной системы можно записать в виде

$$X(t) = \Phi(t)C_1 + \int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)B(\tau)G(\tau) d\tau.$$

Подставляя $t = t_0$ и используя начальное условие $X(t_0) = X_0$, получаем $X(t_0) = \Phi(t_0)C_1 = X_0$, то есть $C_1 = \Phi^{-1}(t_0)X_0$. В результате частное решение неоднородной системы, удовлетворяющее заданному начальному условию, записывается в виде

$$X(t) = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) X_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau) B(\tau) G(\tau) d\tau.$$

Обозначим $K(t, \tau) = \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau)$. Матрица $K(t, \tau)$ называется *матрицей Коши*. С учетом этого обозначения из последнего равенства получаем *формулу Коши*, используемую для решения задачи анализа выходных процессов:

$$X(t) = K(t, t_0) X_0 + \int_{t_0}^t K(t, \tau) B(\tau) G(\tau) d\tau. \quad (4.20)$$

Матрица Коши может быть найдена из системы дифференциальных уравнений:

$$K'(t, t_0) = A(t)K(t, t_0), \quad K(t_0, t_0) = E, \quad (4.21)$$

которая получается из равенства $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ после умножения его на $\Phi^{-1}(t_0)$ справа.

Если матрица $A(t)$ не зависит от t , то есть $A(t) = A$, то матрица Коши может быть записана в виде $K(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$, в чем легко убедиться прямой подстановкой в (4.21). Таким образом, в случае систем с постоянными коэффициентами матрица Коши зависит только от одной переменной: $K(t, t_0) = K(t - t_0) = K(\eta)$, где $\eta = t - t_0$.

Если исследуется система (4.19) с постоянными коэффициентами ($A(t) = A$, $B(t) = B$, $C(t) = C$):

$$\begin{aligned} X' &= AX + BG(t), \quad X(t_0) = X_0, \\ Y(t) &= CX, \end{aligned} \quad (4.22)$$

то формула (4.20) записывается в виде

$$X(t) = K(t - t_0) X_0 + \int_{t_0}^t K(t - \tau) B G(\tau) d\tau. \quad (4.23)$$

Отметим, что первые слагаемые в (4.20), (4.23) описывают свободное движение системы, а вторые — вынужденное.

Формула (4.23) может применяться для решения задачи Коши (4.18), если обозначить $BG(t) = F(t)$.

Рассмотрим три способа нахождения матрицы Коши.

Первый способ основан на определении, а значит, предполагает, что известна фундаментальная система решений. Тогда

$$K(t, \tau) = \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau). \quad (4.24)$$

Второй способ опирается на теорему разложения [42]:

$$K(\eta) = \sum_{i=1}^n \left(e^{\lambda_i \eta} \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{A - \lambda_j E}{\lambda_i - \lambda_j} \right), \quad (4.25)$$

где $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, - собственные значения матрицы A (здесь предполагается, что они различны), а E - единичная матрица.

Третий способ опирается на теорему Гамильтона-Кели [42]:

$$K(\eta) = r_0 E + r_1 A + \dots + r_{n-1} A^{(n-1)} = R(A), \quad (4.26)$$

где n - число строк матрицы A , $A^{(n-1)}$ - $(n-1)$ -я степень матрицы A , коэффициенты $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$ определяются из системы:

$$e^{\lambda_i \eta} = R(\lambda_i) = r_0 + r_1 \lambda_i + \dots + r_{n-1} \lambda_i^{n-1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.27)$$

Заметим, что формула (4.26) справедлива также и в случае кратных собственных значений. Корню λ_i кратности m в системе n уравнений (4.27) соответствуют соотношения:

$$\left. \frac{d^k e^{\lambda \eta}}{d\lambda^k} \right|_{\lambda=\lambda_i} = \left. \frac{d^k R(\lambda)}{d\lambda^k} \right|_{\lambda=\lambda_i}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (4.28)$$

Пример 4.46. Найти свободное и вынужденное движения и закон изменения во времени вектора состояния системы $X(t)$ и ее выходного сигнала $y(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1' = x_1 + 2x_2 + g(t), \\ \dot{x}_2' = 2x_1 + x_2, \end{cases} \quad y(t) = x_1 + x_2,$$

с начальными условиями $x_1(0) = 1, x_2(0) = -1$ при входном сигнале

$$g(t) = \begin{cases} e^t, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Решение. Для рассматриваемой системы имеем $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = (1, 1)$, $G(t) = g(t)$, $n = 2$, $r = 1$, $k = 1$.

1. Найдем матрицу Коши.

Первый способ. Из примера 4.16 известна фундаментальная матрица:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \text{тогда } \Phi^{-1}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ e^t & -e^t \end{pmatrix}$$

(можно убедиться, что $\Phi^{-1}(t) \Phi(t) = E$).

Матрицу Коши получаем по формуле (4.24):

$$K(t, \tau) = \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-3\tau} & e^{-\tau} \\ e^{\tau} & -e^{\tau} \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3(t-\tau)} + e^{-(t-\tau)} & e^{3(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} \\ e^{3(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} & e^{3(t-\tau)} + e^{-(t-\tau)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3\eta} + e^{-\eta} & e^{3\eta} - e^{-\eta} \\ e^{3\eta} - e^{-\eta} & e^{3\eta} + e^{-\eta} \end{pmatrix} = K(\eta).$$

Второй способ. Для получения матрицы Коши воспользуемся формулой (4.25):

$$K(\eta) = e^{3\eta} \frac{A - (-1)E}{3 - (-1)} + e^{-\eta} \frac{A - 3E}{(-1) - 3} = \frac{e^{3\eta}}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \frac{e^{-\eta}}{4} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3\eta} + e^{-\eta} & e^{3\eta} - e^{-\eta} \\ e^{3\eta} - e^{-\eta} & e^{3\eta} + e^{-\eta} \end{pmatrix}.$$

Третий способ. Составим систему (4.27):

$$\begin{cases} e^{3\eta} = r_0 + 3r_1, \\ e^{-\eta} = r_0 - r_1. \end{cases}$$

Отсюда находим $r_0 = \frac{e^{3\eta} + 3e^{-\eta}}{4}$, $r_1 = \frac{e^{3\eta} - e^{-\eta}}{4}$. Матрицу Коши получаем, используя формулу (4.26):

$$K(\eta) = r_0 E + r_1 A = \frac{e^{3\eta} + 3e^{-\eta}}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{3\eta} - e^{-\eta}}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3\eta} + e^{-\eta} & e^{3\eta} - e^{-\eta} \\ e^{3\eta} - e^{-\eta} & e^{3\eta} + e^{-\eta} \end{pmatrix}.$$

Все три способа привели к одному и тому же результату.

2. Зависимость вектора состояния и выхода системы от времени находим по формулам (4.22) и (4.23):

$$X(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{3(t-\tau)} + e^{-(t-\tau)} & e^{3(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} \\ e^{3(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} & e^{3(t-\tau)} + e^{-(t-\tau)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\tau} d\tau = \\ = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{3t} e^{-2\tau} + e^{-t} e^{2\tau} \\ e^{3t} e^{-2\tau} - e^{-t} e^{2\tau} \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 e^{3t} - 1/4 e^{-t} \\ 1/4 e^{3t} - 1/2 e^t + 1/4 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$X_{cd}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}, \quad X_{out}(t) = \begin{pmatrix} 1/4 e^{3t} - 1/4 e^{-t} \\ 1/4 e^{3t} - 1/2 e^t + 1/4 e^{-t} \end{pmatrix},$$

$$X(t) = X_{cd}(t) + X_{out}(t) = \begin{pmatrix} 1/4 e^{3t} + 3/4 e^{-t} \\ 1/4 e^{3t} - 1/2 e^t - 3/4 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

$$Y(t) = y(t) = (1, 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{3t} + \frac{3}{4}e^{-t} \\ \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{4}e^{-t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Пример 4.47. Найти свободное и вынужденное движения и закон изменения во времени вектора состояния системы $X(t)$ и ее выходного сигнала $Y(t)$:

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + g_1(t), \\ x_2' = x_1 + g_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_2, \\ y_2 = x_1 + \frac{1}{2}x_2, \end{cases}$$

с начальными условиями $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 0$ при входном сигнале

$$g_1(t) = \begin{cases} 2, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}, \quad g_2(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}.$$

Решение. Для рассматриваемой системы имеем $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $G(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$, $n = 2$, $r = 2$, $k = 2$.

1. Найдем матрицу Коши.

Первый способ. Из примера 4.17 известна фундаментальная матрица:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}, \quad \text{тогда } \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}.$$

Матрицу Коши получаем по формуле (4.24):

$$\begin{aligned} K(t, \tau) &= \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tau & \sin \tau \\ \sin \tau & -\cos \tau \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t - \tau) & -\sin(t - \tau) \\ \sin(t - \tau) & \cos(t - \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \eta & -\sin \eta \\ \sin \eta & \cos \eta \end{pmatrix} = K(\eta). \end{aligned}$$

Второй способ. Для получения матрицы Коши воспользуемся формулой (4.25), учитывая, что $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$:

$$\begin{aligned} K(\eta) &= e^{i\eta} \frac{A - (-i)E}{i - (-i)} + e^{-i\eta} \frac{A - iE}{-i - i} = \frac{e^{i\eta}}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} - \frac{e^{-i\eta}}{2i} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{i\eta} + e^{-i\eta}}{2} & -\frac{e^{i\eta} - e^{-i\eta}}{2i} \\ \frac{e^{i\eta} - e^{-i\eta}}{2i} & \frac{e^{i\eta} + e^{-i\eta}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \eta & -\sin \eta \\ \sin \eta & \cos \eta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Зависимость от времени векторов состояния и выхода системы находим по формулам (4.22) и (4.23), учитывая, что при $t > 0$ $G(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & -\sin(t-\tau) \\ \sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau = \\ &= \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 + 2 \sin t + \cos t \\ 2 - 2 \cos t + \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} X_{cd}(t) &= \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad X_{sum}(t) = \begin{pmatrix} -1 + 2 \sin t + \cos t \\ 2 - 2 \cos t + \sin t \end{pmatrix}, \\ X(t) = X_{cd}(t) + X_{sum}(t) &= \begin{pmatrix} -1 + 2 \sin t \\ 2 - 2 \cos t \end{pmatrix}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 + 2 \sin t \\ 2 - 2 \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2 \cos t \\ 2 \sin t - \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пример 4.48. Найдти свободное и вынужденное движения и закон изменения во времени вектора состояния системы $X(t)$ и ее выходного сигнала $Y(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1' = x_2 + g(t), \\ \dot{x}_2' = -x_1 - 2x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2, \\ y_2 = x_1, \end{cases}$$

с начальными условиями $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$ при входном сигнале $g(t) = \begin{cases} -1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$

Решение. Для рассматриваемой системы имеем $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $G(t) = g(t)$, $n = 2$, $r = 1$, $k = 2$.

1. Найддем матрицу Коши.

Первый способ. Из примера 4.15 известна фундаментальная матрица:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & e^{-t} - te^{-t} \end{pmatrix}, \quad \text{тогда } \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^t - te^t & -te^t \\ e^t & e^t \end{pmatrix}.$$

Матрицу Коши получаем по формуле (4.24):

$$\begin{aligned} K(t, \tau) &= \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & e^{-t} - te^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\tau - \tau e^\tau & -\tau e^\tau \\ e^\tau & e^\tau \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-(t-\tau)} + (t-\tau)e^{-(t-\tau)} & (t-\tau)e^{-(t-\tau)} \\ -(t-\tau)e^{-(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - (t-\tau)e^{-(t-\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\eta} + \eta e^{-\eta} & \eta e^{-\eta} \\ -\eta e^{-\eta} & e^{-\eta} - \eta e^{-\eta} \end{pmatrix} = K(\eta). \end{aligned}$$

Второй способ. Составим систему (4.28), учитывая, что собственное значение $\lambda = -1$ матрицы A имеет кратность $m = 2$:

$$\begin{cases} e^{-\eta} = r_0 - r_1, \\ \eta e^{-\eta} = r_1. \end{cases}$$

Отсюда находим $r_0 = e^{-\eta} + \eta e^{-\eta}$, $r_1 = \eta e^{-\eta}$. Матрицу Коши записываем по формуле (4.26):

$$K(\eta) = r_0 E + r_1 A = (e^{-\eta} + \eta e^{-\eta}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \eta e^{-\eta} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\eta} + \eta e^{-\eta} & \eta e^{-\eta} \\ -\eta e^{-\eta} & e^{-\eta} - \eta e^{-\eta} \end{pmatrix}.$$

2. Зависимость от времени векторов состояния и выхода системы находим по формулам (4.22) и (4.23), учитывая, что при $t > 0$ $G(t) = -1$:

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{pmatrix} e^{-t} + te^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t} - te^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \\ &+ \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-(t-\tau)} + (t-\tau)e^{-(t-\tau)} & (t-\tau)e^{-(t-\tau)} \\ -(t-\tau)e^{-(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - (t-\tau)e^{-(t-\tau)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (-1) d\tau = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{-t} + 2e^{-t} - 2 \\ 1 - e^{-t} - te^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, $X_{cd}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$,

$$X_{ewn}(t) = \begin{pmatrix} te^{-t} + 2e^{-t} - 2 \\ 1 - e^{-t} - te^{-t} \end{pmatrix}, \quad X(t) = X_{cd}(t) + X_{ewn}(t) = \begin{pmatrix} -2 + 3e^{-t} + te^{-t} \\ 1 - 2e^{-t} - te^{-t} \end{pmatrix},$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 + 3e^{-t} + te^{-t} \\ 1 - 2e^{-t} - te^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + e^{-t} \\ -2 + 3e^{-t} + te^{-t} \end{pmatrix}.$$

4.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти общее решение системы: $\begin{cases} x' = x + 2y + 4e^t, \\ y' = 2x + y - 9t. \end{cases}$

Ответ: $x(t) = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} + 6t - 4$, $y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} - 2e^t - 3t + 5$.

2. Найти частное решение системы из задачи 1, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\text{а) } \begin{cases} x(0) = -4, \\ y(0) = 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x(0) = 3, \\ y(0) = -4. \end{cases}$$

Ответ: а) $x(t) = 6t - 4$, $y(t) = -2e^t - 3t + 5$;

б) $x(t) = 7e^{-t} + 6t - 4$, $y(t) = -7e^{-t} - 2e^t - 3t + 5$.

3. Для системы $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 2x + 3y + 4e^{5t} \end{cases}$ найти:

а) общее решение;

б) решение задачи Коши при начальных условиях $x(0) = 0, y(0) = 0$;

в) решение задачи Коши при начальных условиях $x(0) = 1, y(0) = 3$.

Ответ: а) $x(t) = C_1 e^{4t} - C_2 e^t + e^{5t}, y(t) = 2C_1 e^{4t} + C_2 e^t + 3e^{5t}$;

б) $x(t) = -\frac{4}{3} e^{4t} + \frac{1}{3} e^t + e^{5t}, y(t) = -\frac{8}{3} e^{4t} - \frac{1}{3} e^t + 3e^{5t}$;

в) $x(t) = e^{5t}, y(t) = 3e^{5t}$.

4. Решить следующие задачи Коши для систем второго порядка:

$$1) \begin{cases} x' = y + t^2, x(1) = -2, \\ y' = x + 2e^t, y(1) = e; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = x + 2y, x(0) = 3, \\ y' = x - 5\cos t, y(0) = -1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x' = x + 2y, x(0) = -1, \\ y' = x - 5\cos t, y(0) = 3. \end{cases}$$

Ответ: 1) $x(t) = \frac{3}{2} (e^{t-1} - e^{1-t}) - (1-t)e^t - 2t$,

$y(t) = \frac{3}{2} (e^{t-1} + e^{1-t}) + te^t - t^2 - 2$;

2) $x(t) = \sin t + 3 \cos t, y(t) = -2 \sin t - \cos t$;

3) $x(t) = \sin t + 3 \cos t - 4e^{-t}, y(t) = -2 \sin t - \cos t + 4e^{-t}$.

5. Найти общее решение системы: $\begin{cases} x' = y - 5 \sin t, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$

Ответ: $x(t) = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} - \sin t + 2 \cos t, y(t) = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} + 3 \sin t - \cos t$.

6. Для системы $\begin{cases} x' = 2x + y - 3e^{4t}, \\ y' = x + 2y + 2e^t \end{cases}$ найти:

а) общее решение;

б) решение задачи Коши при начальных условиях $x(0) = -3, y(0) = -1$;

в) решение задачи Коши при начальных условиях $x(0) = -1, y(0) = -3$.

Ответ: а) $x(t) = C_1 e^{3t} - C_2 e^t - (t+1)e^t - 2e^{4t}, y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^t + te^t - e^{4t}$;

б) $x(t) = -2e^{4t} - (t+1)e^t, y(t) = te^t - e^{4t}$;

в) $x(t) = -2e^{4t} - te^t + e^t, y(t) = -2e^t - e^{4t} + te^t$.

7. Решить задачи Коши для систем третьего порядка:

$$1) \begin{cases} x' = y + z, x(0) = -1, \\ y' = z + x, y(0) = 1, \\ z' = x + y, z(0) = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = z + y - x, x(0) = 1, \\ y' = z - y + x, y(0) = 0, \\ z' = z + y + x, z(0) = 0. \end{cases}$$

Ответ: 1) $x(t) = -e^{-t}, y(t) = e^{-t}, z(t) = 0$;

2) $x(t) = \frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{2t} + \frac{1}{2} e^{-2t}, y(t) = \frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{2t} - \frac{1}{2} e^{-2t}$,

$z(t) = -\frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}$.

8. Найти общее решение системы: $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{x} = dt$.

Ответ: $x(t) = C_1 e^t + e^{-t/2} (C_2 \cos \sqrt{3}/2 t + C_3 \sin \sqrt{3}/2 t)$,

$y(t) = C_1 e^t + \frac{1}{2} e^{-t/2} ((\sqrt{3} C_3 - C_2) \cos \sqrt{3}/2 t - (C_3 + \sqrt{3} C_2) \sin \sqrt{3}/2 t)$,

$z(t) = C_1 e^t + \frac{1}{2} e^{-t/2} ((\sqrt{3} C_2 - C_3) \sin \sqrt{3}/2 t - (C_2 + \sqrt{3} C_3) \cos \sqrt{3}/2 t)$.

9. Найти общее решение системы:
$$\begin{cases} x' + y' = 2x, \\ x' + 3y' = 3x + y. \end{cases}$$

Ответ: $x(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + 2C_2 e^t$, $y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t$.

10. Найти общее решение системы:
$$\begin{cases} x'' = 3(y - x - z), \\ y'' = x - y, \\ z'' = -z. \end{cases}$$

Ответ: $x(t) = C_1 t + C_2 + 3C_3 \cos 2t + 3C_4 \sin 2t$,
 $y(t) = C_1 t + C_2 - C_3 \cos 2t - C_4 \sin 2t + C_5 \cos t + C_6 \sin t$,
 $z(t) = C_5 \cos t + C_6 \sin t$.

Указание: можно понизить порядок системы введением вспомогательной функции.

Примечания.

1. К задаче 8. Систему можно записать в нормальной форме: $x' = y$, $y' = z$, $z' = x$.

2. К задаче 10. Система решается стандартным методом сведения к системе уравнений первого порядка. Для этого достаточно ввести вспомогательные функции $u = x'$, $v = y'$, $w = z'$. Соответствующие характеристические уравнения (системы или уравнения, к которому она может быть сведена) - уравнения шестой степени. Избежать трудностей при решении алгебраического уравнения можно, заметив, что выражение для одной из искомым функций, а именно, для $z(t)$, определяется непосредственно из последнего уравнения системы: $z(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ (в обозначениях, данных в ответе, $z(t) = C_5 \cos t + C_6 \sin t$). Выражение для $z(t)$ следует подставить в первое уравнение. В результате получится неоднородная система из двух уравнений второго порядка, которую можно свести к неоднородному дифференциальному уравнению четвертого порядка.

Отметим также, что (см. указание) задачу можно упростить, воспользовавшись следующим приемом. Подставим в первое уравнение выражение для $(x - y)$ и z из двух других. Получим $x'' = 3z'' - 3y''$, или $x'' - 3z'' + 3y'' = 0$. Последнее равенство переписывается как уравнение второго порядка относительно новой функции: $(x - 3z + 3y)'' = 0$, то есть $u'' = 0$ для $u = x - 3z + 3y$. Проинтегрировав это уравнение, получим $x(t) + 3y(t) - 3z(t) = At + B$. Кроме этого, из уравнений исходной системы можно записать еще одно подобное уравнение второго порядка: $x'' - y'' + z'' = -4(x - y + z)$. Обозначая $u = x - y + z$, получаем уравнение $u'' + 4u = 0$. Решение этого уравнения:

$$u(t) = C \cos 2t + D \sin 2t$$

дает еще одно равенство: $x(t) - y(t) + z(t) = C \cos 2t + D \sin 2t$. Окончательное решение получается из алгебраической системы:

$$\begin{cases} x + 3y - 3z = At + B, \\ x - y + z = C \cos 2t + D \sin 2t, \\ z = C_5 \cos t + C_6 \sin t. \end{cases}$$

5. Применение операционного исчисления для решения линейных дифференциальных уравнений и систем

5.1. Преобразование Лапласа

5.1.1. Основные определения

1. *Оригиналом* называется комплекснозначная функция $f(t)$ действительного аргумента t , которая удовлетворяет следующим условиям:

- $f(t) = 0$ при $t < 0$;
- на любом конечном отрезке $[a, b] \in [0, +\infty)$ функция $f(t)$ имеет не более чем конечное число точек разрыва первого рода;
- $f(t)$ имеет ограниченный рост (возрастает не быстрее показательной функции), то есть существуют такие постоянные $M > 0$ и $\sigma \geq 0$, что $|f(t)| < Me^{\sigma t}$ при $t > 0$.

З а м е ч а н и е 5.1.

1. Величина $\sigma_0 = \inf \sigma$ называется *показателем роста* функции $f(t)$. Для ограниченных оригиналов можно принять $\sigma_0 = 0$.

2. Обозначим $f(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$, $f(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$, если пределы существуют и конечны.

3. Совокупность всех оригиналов называется *пространством оригиналов*.

4. В точке t_0 разрыва первого рода функция имеет конечные односторонние пределы: $\lim_{t \rightarrow t_0+0} f(t)$, $\lim_{t \rightarrow t_0-0} f(t)$.

Пример 5.1. Проверить, являются ли функции

$$f_1(t) = \begin{cases} 2e^{5t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{t-2}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad f_3(t) = \begin{cases} 3^{4t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

оригиналами.

Решение. Функция $f_1(t)$ является оригиналом, так как условия "а"- "в" выполнены: $M=2$, $\sigma_0=5$; функция $f_2(t)$ не является оригиналом, так как в точке $t=2$ имеет разрыв второго рода (не выполняется условие "б"); функция $f_3(t)$ не является оригиналом, так как растет быстрее показательной функции (не выполняется условие "в", поскольку $3^{4t} > Me^{\sigma t}$ при любых M и σ для достаточно больших $t > 0$).

2. Изображением функции $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного p , определяемая равенством

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (5.1)$$

З а м е ч а н и е 5.2.

1. Изображение является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$ (рис.5.1). В этой полуплоскости стоящий в правой части равенства (5.1) интеграл Лапласа сходится абсолютно и равномерно [25].

2. Совокупность всех изображений $F(p)$ называется *пространством изображений*.

3. Переход, определяющий изображение $F(p)$ по оригиналу $f(t)$, называется *преобразованием Лапласа*:

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (5.2)$$

Запись $F(p) = L[f(t)]$ означает, что оригиналу $f(t)$ соответствует изображение $F(p)$.

4. Оригинал по изображению находится с помощью *обратного преобразования Лапласа* по формуле обращения

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad (5.3)$$

где путь интегрирования - любая прямая $\operatorname{Re} p = \sigma$, параллельная мнимой оси и лежащая правее прямой $\operatorname{Re} p = \sigma_0$ (рис.5.1).

Непосредственное применение формулы обращения часто затруднительно, поэтому на практике пользуются методами, изложенными в разд.5.1.4.

З а м е ч а н и е 5.3.

1. В технической литературе используются различные обозначения для преобразования Лапласа. Так, в [22, 33] вместо аргумента p применяется s , то есть $F(s) = L[f(t)]$.

2. Для компактной записи

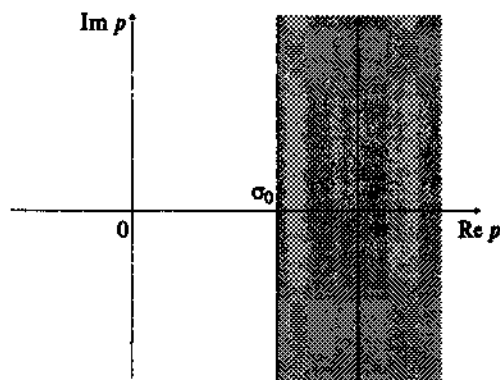


Рис.5.1

оригиналов используется единичная ступенчатая функция $I(t - \tau)$, определяемая формулой

$$I(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t > \tau, \\ 0, & t \leq \tau, \end{cases}$$

где τ - точка приложения (рис.5.2).

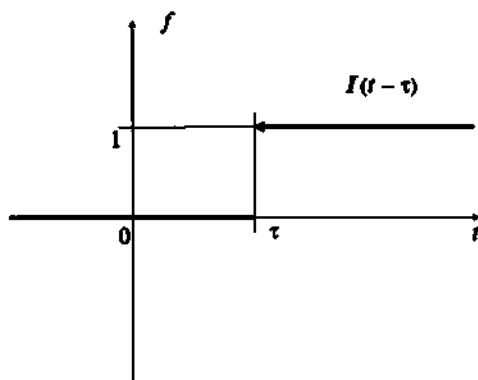


Рис.5.2

При $\tau = 0$ функция $I(t - \tau)$ является *функцией Хевисайда*:

$$I(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Тогда, если функция $f(t)$ удовлетворяет условиям "б", "в" в определении оригинала, но не удовлетворяет условию "а", то функция $f(t) \cdot I(t)$ будет оригиналом, так как

$$f(t) \cdot I(t) = \begin{cases} f(t), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Всюду далее под заданной с помощью аналитической формулы функцией $f(t)$, там, где это не вызывает недоразумений, будем понимать произведение этой функции на функцию Хевисайда, а множитель $I(t)$ опускать.

3. Функции $R(p)$, являющиеся изображениями, удовлетворяют следующему *необходимому условию* ([9,25]): если $R(p)$ есть изображение, то $R(p) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Re} p = \sigma \rightarrow +\infty$. Поэтому функции $F_1(p) = 1$, $F_2(p) = p$, $F_3(p) = \sin p$, $F_4(p) = \frac{p}{p-1}$ не являются изображениями. Однако в практических задачах функции типа $F_1(p) = 1$, $F_2(p) = p$ и другие встречаются. Это требует расширения понятий оригинала и изображения.

Класс оригиналов можно расширить, включив в него функции, которые могут быть не ограничены в окрестности некоторых конечных точек, но такие, что интеграл Лапласа от них тем не менее сходится абсолютно в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$. К числу таких обобщенных оригиналов относятся степенная функция $f(t) = t^\mu$ при $\mu > -1$, $\ln t$ и другие.

4. Во всякой точке t_0 , являющейся точкой разрыва функции $f(t)$, правая часть формулы (5.3) равна $\frac{1}{2} [f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)]$.

Пример 5.2. Найти изображение функции Хевисайда $f(t) = I(t)$.

Решение. Поскольку функция $I(t)$ ограничена, то в качестве показателя роста можно положить $\sigma_0 = 0$. Согласно формуле (5.2)

$$F(p) = L[I(t)] = \int_0^{+\infty} I(t) e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p},$$

так как из равенства $|e^{-pt}| = e^{\operatorname{Re}(-pt)} = e^{-t \operatorname{Re} p} = e^{-\sigma t}$ следует, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} = 0 \text{ при } \operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0 = 0.$$

Пример 5.3. Найти изображение функции $f(t) = e^{at}$, где a - действительное число.

Решение. Показателем роста функции можно считать $\sigma_0 = a$. Согласно формуле (5.2)

$$F(p) = L[e^{at}] = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-p)t} dt = \frac{e^{(a-p)t}}{a-p} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{a-p} = \frac{1}{p-a},$$

так как из равенства $|e^{(a-p)t}| = e^{t(\operatorname{Re} p - a)} = e^{-t(\sigma - a)}$ следует, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-p)t} = 0 \text{ при } \operatorname{Re} p = \sigma > a.$$

5.1.2. Свойства преобразования Лапласа

Будем предполагать, что рассматриваемые далее функции $f(t)$, $f_1(t)$, ..., $f_n(t)$ являются оригиналами. Соответствующие им изображения (при $\operatorname{Re} p > \sigma_i$, $i = 0, 1, \dots, n$) обозначим $F(p)$, $F_1(p)$, ..., $F_n(p)$.

1. **Линейность.** Если $f_1(t)$, ..., $f_n(t)$ - оригиналы, то при любых комплексных числах c_i , $i = 1, \dots, n$, функция $f(t) = \sum_{k=1}^n c_k f_k(t)$ также является оригиналом

и справедливо равенство $L\left[\sum_{k=1}^n c_k f_k(t)\right] = \sum_{k=1}^n c_k L[f_k(t)]$ или

$$L[c_1 f_1(t) + \dots + c_n f_n(t)] = c_1 F_1(p) + \dots + c_n F_n(p), \operatorname{Re} p > \max\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}. \quad (5.6)$$

Заметим, что для функции $f(t) = \sum_{k=1}^n c_k f_k(t)$ существенно, что все слагаемые

являются оригиналами, так как, например, функция $f(t) = \frac{e^t - 1}{t}$ является оригиналом, а слагаемые $f_1(t) = \frac{e^t}{t}$ и $f_2(t) = \frac{1}{t}$ не являются.

Справедливо и обратное утверждение: если $F_1(p), \dots, F_n(p)$ - изображения, то $L^{-1}[c_1 F_1(p) + \dots + c_n F_n(p)] = c_1 f_1(t) + \dots + c_n f_n(t)$.

Здесь также важно, что слагаемые $F_1(p), \dots, F_n(p)$ являются изображениями, поскольку из того, что $R(p) = c_1 F_1(p) + \dots + c_n F_n(p)$ - изображение, не следует, что $F_1(p), \dots, F_n(p)$ - изображения. Например, функция $R(p) = \ln \frac{p-1}{p}$ является изображением, а слагаемые $F_1(p) = \ln(p-1)$ и $F_2(p) = -\ln p$ не являются.

Пример 5.4. Найти изображение функции $f(t) = 3 + 2e^{-t}$.

Решение. Из примера 5.2 имеем $L[I(t)] = \frac{1}{p}$, а из примера 5.3 при $a = -1$: $L[e^{-t}] = \frac{1}{p+1}$. Тогда согласно свойству линейности для оригинала $f(t) = 3I(t) + 2e^{-t}$ получаем $R(p) = 3 \frac{1}{p} + 2 \frac{1}{p+1}$.

Пример 5.5. Найти изображение функции $f(t) = \cos t$.

Решение. Используя формулу Эйлера $e^{it} = \cos t + i \sin t$, получаем

$$f(t) = \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2} e^{it} + \frac{1}{2} e^{-it}.$$

Из примера 5.3 при $a = i$ и $a = -i$ следует, что $L[e^{it}] = \frac{1}{p-i}$, $L[e^{-it}] = \frac{1}{p+i}$. Тогда по свойству линейности:

$$L[\cos t] = \frac{1}{2} L[e^{it}] + \frac{1}{2} L[e^{-it}] = \frac{1}{2} \frac{1}{p-i} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+i} = \frac{p+i+p-i}{2(p^2+1)} = \frac{p}{p^2+1}.$$

2. **Подобие** (теорема подобия). Для любого $a > 0$ из $F(p) = L[f(t)]$ следует

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \quad \operatorname{Re} p > a\sigma_0, \quad (5.7)$$

и обратно: $L^{-1}[F(ap)] = \frac{1}{a} f(t/a)$.

Пример 5.6. Найти изображение функции $f(t) = \cos at$.

Решение. Из примера 5.5 следует, что $L[\cos t] = \frac{p}{p^2 + 1}$. Тогда по теореме

$$\text{подобия } L[\cos at] = \frac{1}{a} \frac{\frac{p}{a}}{(\frac{p}{a})^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + a^2}.$$

3. **Смещение** (теорема смещения). При любом комплексном a из $F(p) = L[f(t)]$ следует

$$L[e^{at} f(t)] = F(p - a), \quad \operatorname{Re}(p - a) > \sigma_0, \quad (5.8)$$

то есть умножению оригинала на e^{at} отвечает смещение изображения на a .

Пример 5.7. Найти изображение функции $f(t) = e^{at} \cos bt$.

Решение. Из примера 5.6 следует, что $L[\cos bt] = \frac{p}{p^2 + b^2}$. Тогда по теореме

$$\text{смещения } L[e^{at} \cos bt] = \frac{p - a}{(p - a)^2 + b^2}.$$

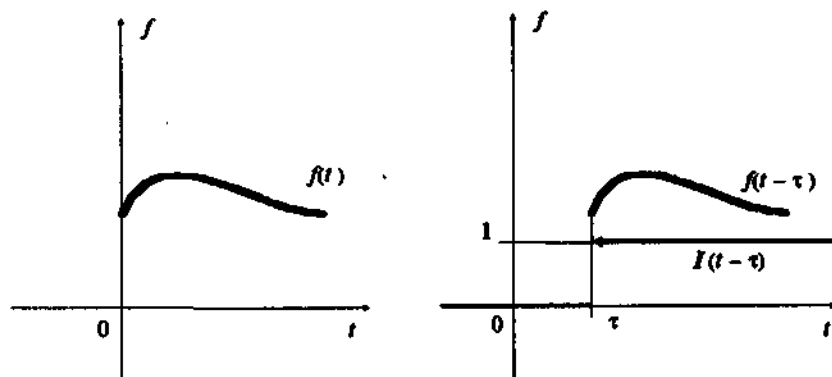


Рис.5.3

4. **Запаздывание** (теорема запаздывания). Для любого $\tau > 0$ из $F(p) = L[f(t)]$ следует

$$L[f(t - \tau)] = e^{-p\tau} F(p), \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0, \quad (5.9)$$

где $f(t - \tau) = f(t - \tau) I(t - \tau)$ (рис.5.3), то есть запаздыванию оригинала на $\tau > 0$ соответствует умножение изображения на $e^{-p\tau}$.

Пример 5.8. Найти изображение функции

$$f(t) = \cos(t - 3) I(t - 3) = \cos(t - 3).$$

Решение. Из примера 5.5 следует, что $L[\cos t] = \frac{p}{p^2 + 1}$. По теореме запаздывания $L[\cos(t - 3)] = e^{-3p} \frac{p}{p^2 + 1}$.

Пример 5.9. Найти оригинал по изображению

$$F(p) = \frac{p - 1}{(p - 1)^2 + 4} e^{-4p}.$$

Решение. Из примера 5.7 (при $a = 1, b = 2$) следует, что изображению $\frac{p - 1}{(p - 1)^2 + 4}$ соответствует оригинал $e^t \cos 2t$. Тогда по теореме запаздывания $f(t) = L^{-1}\{F(p)\} = e^{(t-4)} \cos 2(t - 4) I(t - 4)$.

Пример 5.10. Найти изображение функции

$$\delta_h(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & 0 < t \leq h, \\ 0, & t < 0, t > h, \end{cases}$$

график которой представлен на рис.5.4.

Решение. С учетом (5.4) представим функцию $\delta_h(t)$ в виде

$$\delta_h(t) = \frac{I(t) - I(t - h)}{h}.$$

Из примера 5.2 имеем

$$L[I(t)] = \frac{1}{p}.$$

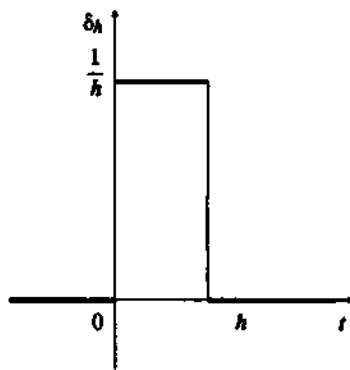


Рис.5.4

Применяя свойства линейности и запаздывания, получаем

$$L[\delta_h(t)] = \frac{1}{h} L[I(t)] - \frac{1}{h} L[I(t - h)] = \frac{1}{h} \frac{1}{p} - \frac{1}{h} \frac{1}{p} e^{-ph} = \frac{1 - e^{-ph}}{ph}.$$

Заметим, что, находя предел при $h \rightarrow 0$ в последнем выражении, можно получить изображение δ -функции, определяемой равенством $\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(t)$:

$$L[\delta(t)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-ph}}{ph} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p e^{-ph}}{p} = 1. \quad (5.10)$$

З а м е ч а н и е 5.4. В инженерных приложениях δ -функция часто встречается как идеализация импульса конечной длительности. В теории автоматического регулирования и управления δ -функция вместе с единичной ступенчатой являются типовыми входными воздействиями [32].

Очевидно, изображение δ -функции не удовлетворяет необходимому условию. Этот факт свидетельствует о практическом требовании расширения понятия оригинала. Дельта-функция относится к обобщенным функциям и задается соотношением (3.14).

5. Дифференцирование оригинала. Если функции $f(t), f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами и $F(p) = L[f(t)]$, то

$$\begin{aligned} L[f'(t)] &= pF(p) - f(+0), \\ L[f''(t)] &= p^2 F(p) - pf(+0) - f'(+0), \\ &\dots \\ L[f^{(n)}(t)] &= p^n F(p) - p^{n-1}f(+0) - \dots - f^{(n-1)}(+0), \end{aligned} \quad (5.11)$$

где $f^{(i)}(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f^{(i)}(t)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Пример 5.11. Найти изображение $f'(t)$, если $f(t) = e^{-t} \cos 3t$.

Решение. Из примера 5.7 (при $a = -1$, $b = 3$) следует, что

$$L[e^{-t} \cos 3t] = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 9}.$$

Находим $f(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} e^{-t} \cos 3t = 1$. Согласно (5.11)

$$L[f'(t)] = p \frac{p+1}{(p+1)^2 + 9} - 1.$$

Пример 5.12. Найти изображение выражения $x'' + 3x' + 2x + 1$ с начальными условиями $x(+0) = 1$, $x'(+0) = 4$.

Решение. Пусть $X(p) = L[x(t)]$, тогда

$$L[x'(t)] = pX(p) - 1, \quad L[x''(t)] = p^2 X(p) - p \cdot 1 - 4.$$

Из примера 5.2 следует, что $L[I(t)] = \frac{1}{p}$. Используя свойство линейности и равенство $L[1] = L[I(t)]$, получаем

$$L[x'' + 3x' + 2x + 1] = L[x''] + 3L[x'] + 2L[x] + L[1] = \\ = p^2 X(p) - p - 4 + 3pX(p) - 3 + 2X(p) + \frac{1}{p} = (p^2 + 3p + 2)X(p) - p - 7 + \frac{1}{p}.$$

6. Интегрирование оригинала. Если функция $f(t)$ является оригиналом и $F(p) = L[f(t)]$, то

$$L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(p)}{p}, \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0, \quad (5.12)$$

то есть интегрированию оригинала соответствует деление изображения на аргумент p .

Пример 5.13. Найти изображение интеграла $L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right]$ от функции $f(t) = \cos t$.

Решение. Из примера 5.6 следует, что $L[\cos t] = \frac{p}{p^2 + 1} = F(p)$. Отсюда получаем

$$L\left[\int_0^t \cos \tau d\tau\right] = L[\sin t] = \frac{p}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

7. Дифференцирование изображения. Если функция $f(t)$ является оригиналом и $F(p) = L[f(t)]$, то

$$L[(-1)^n t^n f(t)] = F^{(n)}(p). \quad (5.13)$$

Пример 5.14. Найти изображения функций $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t^2$, ..., $f_n(t) = t^n$.

Решение. Из примера 5.2 следует, что $L[I(t)] = \frac{1}{p} = F(p)$. Согласно (5.13) при $n=1$ $L[-t] = F'(p) = -\frac{1}{p^2}$ или по свойству линейности $L[t] = \frac{1}{p^2}$. При $n=2$ $L[t^2] = F''(p) = \frac{2}{p^3}$. Таким образом, для любого n имеем $L[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Пример 5.15. Найти изображение функции $f(t) = t \cos 3t$.

Решение. Из примера 5.6 следует, что $L[\cos 3t] = \frac{p}{p^2 + 9} = F(p)$. При $n = 1$ из 5.13 следует $L[(-t)f(t)] = F'(p)$ или

$$L[-t \cos 3t] = \left(\frac{p}{p^2 + 9} \right)' = \frac{p^2 + 9 - 2p^2}{(p^2 + 9)^2} = -\frac{p^2 - 9}{(p^2 + 9)^2}.$$

Окончательно получаем $L[t \cos 3t] = \frac{p^2 - 9}{(p^2 + 9)^2}$.

8. Интегрирование изображений. Если функция $\frac{f(t)}{t}$ является оригиналом и $F(p) = L[f(t)]$, то

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^{\infty} F(z) dz. \quad (5.14)$$

Пример 5.16. Найти изображение функции $\frac{\sin t}{t}$.

Решение. Из примера 5.13 следует, что $L[\sin t] = \frac{1}{p^2 + 1} = F(p)$. Отсюда

$$L\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \int_p^{\infty} \frac{dz}{z^2 + 1} = \operatorname{arctg} z \Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

9. Умножение изображений (теорема Бореля).

Сверткой оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau. \quad (5.15)$$

Из $F_1(p) = L[f_1(t)]$ и $F_2(p) = L[f_2(t)]$ следует

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(p) F_2(p), \quad (5.16)$$

то есть свертке оригиналов соответствует произведение изображений.

Пример 5.17. Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2}.$$

Решение. Представим $F(p)$ в виде произведения изображений:

$$R(p) = F_1(p) F_2(p) = \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Из примеров 5.6 и 5.13 следует, что

$$f_1(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{p^2 + 1} \right] = \sin t, \quad f_2(t) = L^{-1} \left[\frac{p}{p^2 + 1} \right] = \cos t.$$

Согласно (5.16) получаем искомый оригинал:

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{p}{(p^2 + 1)^2} \right] &= f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t \sin \tau \cos(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [\sin t + \sin(2\tau - t)] d\tau = \frac{1}{2} \left[\tau \sin t - \frac{\cos(2\tau - t)}{2} \right] \Big|_0^t = \\ &= \frac{1}{2} \left(t \sin t - \frac{\cos t}{2} + \frac{\cos(-t)}{2} \right) = \frac{1}{2} t \sin t. \end{aligned}$$

10. Интеграл Дюамеля. Если функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ дифференцируемы, являются оригиналами и $F_1(p) = L[f_1(t)]$, $F_2(p) = L[f_2(t)]$, то

$$\begin{aligned} L^{-1} [p F_1(p) F_2(p)] &= f_1(0) f_2(t) + f_1' * f_2 = f_2(0) f_1(t) + f_2' * f_1 = \\ &= f_1(0) f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = f_2(0) f_1(t) + \int_0^t f_2'(\tau) f_1(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Пример 5.18. Найти оригинал, соответствующий изображению

$$R(p) = \frac{p}{(p-1)(p-2)}.$$

Решение. Представим изображение в виде произведения

$$R(p) = p \cdot \frac{1}{(p-1)} \cdot \frac{1}{(p-2)}.$$

Из примера 5.3 следует:

$$f_1(t) = L^{-1} [F_1(p)] = L^{-1} \left[\frac{1}{p-1} \right] = e^t; \quad f_2(t) = L^{-1} [F_2(p)] = L^{-1} \left[\frac{1}{p-2} \right] = e^{2t}.$$

Тогда по формуле (5.17) получаем

$$L^{-1} [R(p)] = f_1(0) f_2(t) + f_1' * f_2 = 1 \cdot e^{2t} + \int_0^t e^\tau e^{2(t-\tau)} d\tau =$$

$$= e^{2t} + e^{2t} \int_0^t e^{-\tau} d\tau = e^{2t} - e^{2t} e^{-\tau} \Big|_0^t = -e^t + 2e^{2t}.$$

11. Теорема о связи "начальных" и "конечных" значений оригинала и изображения. Начальное значение оригинала находится по формуле

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p). \quad (5.18)$$

Если существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = f(+\infty)$, то

$$f(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p). \quad (5.19)$$

Из (5.18), (5.19) следует, что для нахождения начальных и конечных значений оригинала не требуется знания оригинала, а достаточно иметь соответствующее изображение.

На практике соотношение (5.19) применяется, например, для нахождения установившегося значения выходного сигнала в системах автоматического регулирования (см. разд. 5.2.2).

Пример 5.19. Найти начальное и конечное значения оригинала, которому соответствует изображение

$$F(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 9}.$$

Решение. Согласно (5.18) и (5.19)

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p(p+1)}{(p+1)^2 + 9} = 1, \quad f(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p(p+1)}{(p+1)^2 + 9} = 0.$$

С другой стороны, из примера 5.7 следует, что

$$f(t) = L^{-1} \left[\frac{p+1}{(p+1)^2 + 9} \right] = e^{-t} \cos 3t, \quad f(0) = 1, \quad f(+\infty) = 0,$$

что подтверждает полученный результат.

Полученные решения примеров 5.2 - 5.17 позволяют сформировать таблицу преобразования Лапласа. Табл. 5.1 является фрагментом более полных таблиц ([18]) и используется далее при решении примеров и задач.

5.1.3. Нахождение изображения по оригиналу

Применение таблицы и свойств преобразования Лапласа

Для нахождения изображения требуется применить свойства преобразования Лапласа так, чтобы к функции или ее составляющим можно было применить результаты, содержащиеся в табл. 5.1.

Таблица 5.1

N	$f(t)$	$F(p)$	N	$f(t)$	$F(p)$
1	$I(t)$	$\frac{1}{p}$	14	$\frac{1}{a} e^{-t/a}$	$\frac{1}{1+ap}$
2	C	$\frac{C}{p}$	15	$\frac{1}{a} (e^{at} - 1)$	$\frac{1}{p(p-a)}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$	16	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$
4	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	17	$\frac{1}{a^2} (1 - \cos at)$	$\frac{1}{p(p^2 + a^2)}$
5	$\delta(t)$	1	18	$\frac{1}{a^2} (e^{at} - 1 - at)$	$\frac{1}{p^2(p-a)}$
6	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	19	$\operatorname{sh} at$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
7	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	20	$\operatorname{ch} at$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
8	$\sin at$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	21	$(t + \frac{1}{2} at^2) e^{at}$	$\frac{p}{(p-a)^3}$
9	$\cos at$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	22	$(1 + 2at + \frac{1}{2} a^2 t^2) e^{at}$	$\frac{p^2}{(p-a)^3}$
10	$t \sin at$	$\frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2}$	23	$(1 + at) e^{at}$	$\frac{p}{(p-a)^2}$
11	$t \cos at$	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$	24	$\cos^2 at$	$\frac{p^2 + 2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$
12	$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(p-a)^2 + b^2}$	25	$\sin^2 at$	$\frac{2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$
13	$e^{at} \cos bt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}$	26	$\sin \frac{a}{\sqrt{2}} t \operatorname{sh} \frac{a}{\sqrt{2}} t$	$\frac{a^2 p}{p^4 + a^4}$

N	$f(t)$	$F(p)$	N	$f(t)$	$F(p)$
27	$\cos \frac{a}{\sqrt{2}} t \operatorname{ch} \frac{a}{\sqrt{2}} t$	$\frac{p^3}{p^4 + a^4}$	35	$\frac{a \sin at - b \sin bt}{a^2 - b^2}$	$\frac{p^2}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$
28	$\frac{1}{2} (\operatorname{sh} at - \sin at)$	$\frac{a^3}{p^4 - a^4}$	36	$\frac{a^2 \cos at - b^2 \cos bt}{a^2 - b^2}$	$\frac{p^3}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$
29	$\frac{1}{2} (\operatorname{ch} at - \cos at)$	$\frac{a^2 p}{p^4 - a^4}$	37	$\frac{b \operatorname{sh} at - a \operatorname{sh} bt}{a^2 - b^2}$	$\frac{ab}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$
30	$\frac{1}{2} (\operatorname{sh} at + \sin at)$	$\frac{ap^2}{p^4 - a^4}$	38	$\frac{\operatorname{ch} at - \operatorname{ch} bt}{a^2 - b^2}$	$\frac{p}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$
31	$\frac{1}{2} (\operatorname{ch} at + \cos at)$	$\frac{p^3}{p^4 - a^4}$	39	$\frac{a \operatorname{sh} at - b \operatorname{sh} bt}{a^2 - b^2}$	$\frac{p^2}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$
32	$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}$	$\frac{p}{(p - a)(p - b)}$	40	$\frac{a^2 \operatorname{ch} at - b^2 \operatorname{ch} bt}{a^2 - b^2}$	$\frac{p^3}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$
33	$\frac{a \sin bt - b \sin at}{a^2 - b^2}$	$\frac{ab}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	41	$t - \frac{1}{a} \sin at$	$\frac{a^2}{p^2(p^2 + a^2)}$
34	$\frac{\cos bt - \cos at}{a^2 - b^2}$	$\frac{p}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	42	$\frac{1}{a} \operatorname{sh} at - t$	$\frac{a^2}{p^2(p^2 - a^2)}$
N	$f(t)$		$F(p)$		
43	$1 - \cos at - \frac{at}{2} \sin at$		$\frac{a^4}{p(p^2 + a^2)^2}$		
44	$1 - \operatorname{ch} at + \frac{at}{2} \operatorname{sh} at$		$\frac{a^4}{p(p^2 - a^2)^2}$		
45	$1 + \frac{b^2 \cos at - a^2 \cos bt}{a^2 - b^2}$		$\frac{a^2 b^2}{p(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$		
46	$1 + \frac{b^2 \operatorname{ch} at - a^2 \operatorname{ch} bt}{a^2 - b^2}$		$\frac{a^2 b^2}{p(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$		
47	$\frac{(c - b)e^{at} + (a - c)e^{bt} + (b - a)e^{ct}}{(a - b)(a - c)(c - b)}$		$\frac{1}{(p - a)(p - b)(p - c)}$		
48	$\frac{a(b - c)e^{at} + b(c - a)e^{bt} + c(a - b)e^{ct}}{(a - b)(b - c)(a - c)}$		$\frac{p}{(p - a)(p - b)(p - c)}$		
49	$\frac{a^2(b - c)e^{at} + b^2(c - a)e^{bt} + c^2(a - b)e^{ct}}{(a - b)(b - c)(a - c)}$		$\frac{p^2}{(p - a)(p - b)(p - c)}$		

50	$\frac{1}{2a^3} (\sin at - at \cos at)$	$\frac{1}{(p^2 + a^2)^3}$
51	$\frac{1}{2a} (\sin at + at \cos at)$	$\frac{p^2}{(p^2 + a^2)^2}$
52	$\frac{t \sin at}{2a}$	$\frac{p}{(p^2 + a^2)^2}$

Пример 5.20. Найти изображения следующих функций:

а) $f(t) = \frac{5}{2} t^2 e^{4t}$; б) $f(t) = 2e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t$; в) $\operatorname{ch} t \cos 2t$;

г) $f(t) = \sin^4 t$; д) $f(t) = \frac{1}{4} t \sin 2t$; е) $f(t) = \sin^2 3t$;

ж) $f(t) = (e^t + \operatorname{sh} t) \cos 2t$; з) $f(t) = 2t^4 + 9t^3 - 3t^2 + t - 3$.

Решение. а) Используя свойство линейности и формулу 7 из табл. 5.1 при $n = 2$, $a = 4$, получаем

$$F(p) = \frac{5}{2} \frac{2!}{(p-4)^3} = \frac{5}{(p-4)^3}.$$

б) Используя свойство линейности и формулы 13 и 12 из табл. 5.1 при $a = -1$, $b = 2$, получаем

$$F(p) = 2 \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4} - \frac{1}{2} \frac{2}{(p+1)^2 + 4} = \frac{2p+1}{(p+1)^2 + 4}.$$

в) Применяя формулу $\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, получаем

$$f(t) = \operatorname{ch} t \cos 2t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \cos 2t = \frac{1}{2} e^t \cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t} \cos 2t.$$

Используя свойство линейности и формулу 13 из табл. 5.1, находим

$$F(p) = \frac{1}{2} \frac{p-1}{(p-1)^2 + 4} + \frac{1}{2} \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4}.$$

г) Учтем, что

$$\begin{aligned} \sin^4 t &= \frac{1}{4} (1 - \cos 2t)^2 = \frac{1}{4} (1 - 2 \cos 2t + \cos^2 2t) = \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - 2 \cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) = \frac{1}{8} (\cos 4t - 4 \cos 2t + 3). \end{aligned}$$

Используя свойство линейности и формулы 2,9 из табл.5.1, получаем

$$R(p) = \frac{1}{8} \left(\frac{p}{p^2 + 16} - 4 \frac{p}{p^2 + 4} + \frac{3}{p} \right).$$

д) По формуле 10 из табл.5.1 находим

$$F(p) = L \left[\frac{1}{4} t \sin 2t \right] = \frac{1}{4} \frac{4p}{(p^2 + 4)^2} = \frac{p}{(p^2 + 4)^2}.$$

е) Поскольку $f(t) = \sin^2 3t = \frac{1}{2} (1 - \cos 6t)$, то по формулам 2 и 9 из табл.5.1

$$\text{имеем } F(p) = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2} \frac{p}{p^2 + 36}.$$

ж) С учетом формулы $\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ запишем $f(t)$ в виде

$$f(t) = (e^t + \operatorname{sh} t) \cos 2t = \left(e^t + \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) \cos 2t = \frac{3}{2} e^t \cos 2t - \frac{1}{2} e^{-t} \cos 2t.$$

Аналогично п."в" получаем

$$F(p) = \frac{3}{2} \frac{p-1}{(p-1)^2 + 4} - \frac{1}{2} \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4}.$$

з) Используя свойство линейности и формулы 2,4 из табл.5.1, получаем

$$F(p) = L[2t^4 + 9t^3 - 3t^2 + t - 3] = 2 \frac{4!}{p^5} + 9 \frac{3!}{p^4} - 3 \frac{2!}{p^3} + \frac{1}{p^2} - \frac{3}{p}.$$

Пример 5.21. Найти изображения следующих функций:

а) $f(t) = te^{2t} \sin 3t$;

б) $f(t) = \frac{2}{t} (1 - \cos t)$;

в) $f(t) = \begin{cases} \cos 4(t-2), & t > 2, \\ 0, & t \leq 2; \end{cases}$

г) $f(t) = \begin{cases} e^{-3t} \cos 4(t-2), & t > 2, \\ 0, & t \leq 2; \end{cases}$

д) $f(t) = \frac{1}{2} (t-2)^2 e^{-(t-2)} I(t-2)$;

е) $f(t) = e^{2t} + I(t-1) + I(t-4) \sin 3(t-4)$;

ж) $\int_0^t \frac{\operatorname{sh} \tau}{\tau} d\tau$.

Решение. а) Согласно формуле 12 из табл. 5.1

$$L[e^{2t} \sin 3t] = \frac{3}{(p-2)^2 + 9}.$$

По свойству дифференцирования изображения (формула (5.13)) при $n = 1$ имеем

$$L[(-1) f(t)] = F'(p) \text{ или } L[f(t)] = -F'(p).$$

Поэтому

$$L[t e^{2t} \sin 3t] = - \left[\frac{3}{(p-2)^2 + 9} \right]' = - \frac{-2(p-2) \cdot 3}{[(p-2)^2 + 9]^2} = \frac{6(p-2)}{[(p-2)^2 + 9]^2}.$$

б) Применим свойства линейности и интегрирования изображения. Так как $L[1 - \cos t] = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}$ в силу формул 1 и 9 из табл.5.1, то согласно (5.14)

$$\begin{aligned} L\left[\frac{2}{t}(1 - \cos t)\right] &= 2 \int_p^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{z}{z^2 + 1}\right) dz = \\ &= [2 \ln z - \ln(z^2 + 1)] \Big|_p^\infty = \ln \frac{z^2}{z^2 + 1} \Big|_p^\infty = \ln 1 - \ln \frac{p^2}{p^2 + 1} = \ln \frac{p^2 + 1}{p^2}. \end{aligned}$$

в) Согласно формуле 9 из табл.5.1 $L[\cos 4t] = \frac{p}{p^2 + 16}$. Функцию $f(t)$ можно записать, используя единичную ступенчатую функцию:

$$f(t) = \cos 4(t-2) I(t-2).$$

Тогда по теореме запаздывания (формула (5.9) при $\tau = 2$)

$$L[\cos 4(t-2)] = e^{-2p} \frac{p}{p^2 + 16}.$$

г) Согласно теореме смещения (формула (5.8)) и с учетом результата п."в" имеем $L[e^{-3t} \cos 4(t-2)] = e^{-2(p+3)} \frac{p+3}{(p+3)^2 + 16}$, так как $a = -3$.

д) Согласно теореме запаздывания (формула (5.9) при $\tau = 2$) и по формуле 7 из табл.5.1 при $n = 2$, $a = -1$

$$L\left[\frac{1}{2}(t-2)^2 e^{-(t-2)} I(t-2)\right] = e^{-2p} L\left[\frac{1}{2} t^2 e^{-t}\right] = e^{-2p} \frac{1}{2} \frac{2!}{(p+1)^3} = \frac{e^{-2p}}{(p+1)^3}.$$

е) Используя свойства линейности, запаздывания и формулы 6,1,8 из табл.5.1, получаем $R(p) = \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p} e^{-p} + e^{-4p} \frac{3}{p^2 + 9}$.

ж) Согласно формуле 19 из табл.5.1 получаем $L[\operatorname{sh} t] = \frac{1}{p^2 - 1}$. По свойству интегрирования изображения (формула (5.14)):

$$L\left[\frac{\text{sh } t}{t}\right] = \int_p^{\infty} \frac{dz}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{z-1}{z+1} \Big|_p^{\infty} = -\frac{1}{2} \ln \frac{p-1}{p+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{p+1}{p-1},$$

так как $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}.$

По свойству интегрирования оригинала (формула (5.12)):

$$L\left[\int_0^t \frac{\text{sh } \tau}{\tau} d\tau\right] = \frac{1}{2p} \ln \frac{p+1}{p-1}.$$

Нахождение изображений функций, заданных графиком

Часто при решении прикладных задач оригинал задан графиком. Например, оригиналом может быть входной сигнал, действующий на систему автоматического регулирования. В таких случаях рекомендуется сначала записать аналитическое выражение оригинала с помощью единичной ступенчатой функции (5.4), привести полученное выражение к виду, удобному для применения табл.5.1 и свойств преобразования Лапласа.

Пример 5.22. Найти изображение функций, заданных графиками на рис.5.5, $a - u$.

Решение. а) Представим функцию $f(t)$ в виде

$$f(t) = (1-t) I(t-1) = -(t-1) I(t-1).$$

Согласно формуле 3 из табл.5.1 и теореме запаздывания (формула (5.9) при $\tau = 1$)

$$F(p) = -\frac{1}{p^2} e^{-p}.$$

б) Запишем функцию $f(t)$ в виде

$$f(t) = (1-t) [I(t) - I(t-1)] = (1-t) I(t) + (t-1) I(t-1).$$

Согласно формулам 1,3 из табл.5.1 и (5.6), (5.9)

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} e^{-p}.$$

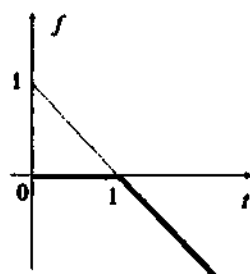
в) Представим изображенную функцию в виде

$$f(t) = -t I(t-1) = -(t-1) I(t-1) - I(t-1).$$

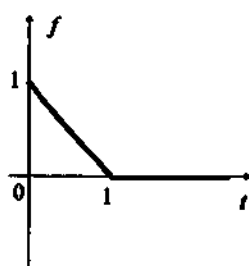
Согласно формулам 1,3 из табл.5.1 и (5.6), (5.9) $F(p) = -\frac{1}{p^2} e^{-p} - \frac{1}{p} e^{-p}.$

г) Запишем функцию $f(t)$ в виде

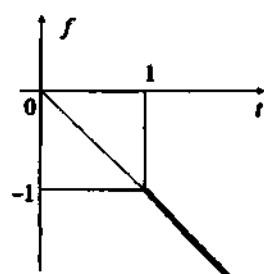
$$f(t) = (t-1) [I(t-1) - I(t-2)] + (3-t) [I(t-2) - I(t-3)] =$$



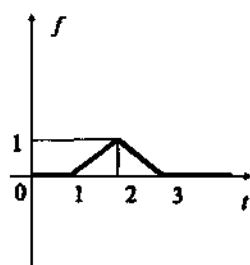
a



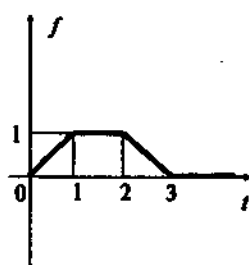
б



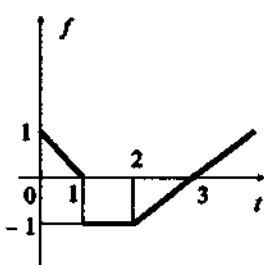
в



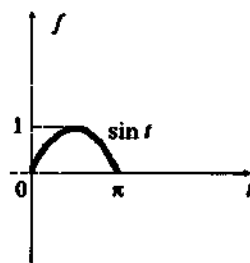
г



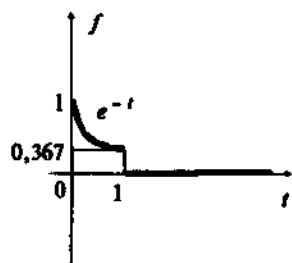
д



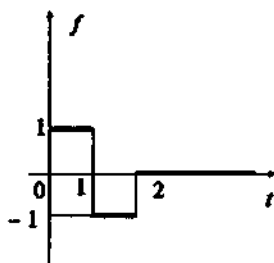
е



ж



з



и

Рис.5.5

$$= (t-1)I(t-1) - 2(t-2)I(t-2) + (t-3)I(t-3).$$

Согласно формулам 3 из табл.5.1 и (5.6), (5.9)

$$R(p) = \frac{1}{p^2} e^{-p} - \frac{2}{p^2} e^{-2p} + \frac{1}{p^2} e^{-3p}.$$

д) Представим функцию $f(t)$ в виде

$$\begin{aligned} f(t) &= t[I(t) - I(t-1)] + [I(t-1) - I(t-2)] + (3-t)[I(t-2) - I(t-3)] = \\ &= tI(t) - (t-1)I(t-1) - I(t-1) + I(t-1) - I(t-2) + \\ &\quad + (2-t)I(t-2) + I(t-2) - (3-t)I(t-3) = \\ &= tI(t) - (t-1)I(t-1) - (t-2)I(t-2) + (t-3)I(t-3). \end{aligned}$$

Согласно формулам 3 из табл.5.1 и (5.6), (5.9)

$$R(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} e^{-p} - \frac{1}{p^2} e^{-2p} + \frac{1}{p^2} e^{-3p}.$$

е) Запишем функцию $f(t)$ в виде

$$\begin{aligned} f(t) &= (1-t)[I(t) - I(t-1)] - 1[I(t-1) - I(t-2)] + (t-3)I(t-2) = \\ &= (1-t)I(t) + (t-1)I(t-1) - I(t-1) + I(t-2) + (t-2)I(t-2) - I(t-2) = \\ &= (1-t)I(t) + (t-1)I(t-1) - I(t-1) + (t-2)I(t-2). \end{aligned}$$

Согласно формулам 1,3 из табл.5.1 и (5.6), (5.9)

$$R(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} e^{-p} - \frac{1}{p} e^{-p} + \frac{1}{p^2} e^{-2p}.$$

ж) Представим функцию $f(t)$ в виде

$$f(t) = \sin t [I(t) - I(t-\pi)] = \sin t I(t) + \sin(t-\pi) I(t-\pi).$$

Согласно формуле 8 из табл.5.1 и (5.9) $R(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{e^{-\pi p}}{p^2+1}.$

з) Запишем функцию $f(t)$ в виде

$$f(t) = e^{-t}[I(t) - I(t-1)] = e^{-t}I(t) - \frac{e^{-(t-1)}}{e}I(t-1).$$

Согласно формуле 6 из табл.5.1 и (5.9)

$$R(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{e} \frac{1}{p+1} e^{-p} = \frac{1}{p+1} (1 - e^{-p-1}).$$

и) Представим функцию $f(t)$ в виде

$$f(t) = 1[I(t) - I(t-1)] - 1[I(t-1) - I(t-2)] = I(t) - 2I(t-1) + I(t-2).$$

Согласно формулам 2 из табл.5.1 и (5.6), (5.9) $R(p) = \frac{1}{p} - \frac{2}{p} e^{-p} + \frac{1}{p} e^{-2p}.$

Нахождение изображений периодических функций

Во многих практических приложениях используются оригиналы, являющиеся периодическими функциями.

Пусть $f(t)$ - оригинал с периодом T (рис.5.6, а), образованный повторением функции $f_0(t)$ (рис.5.6, б):

$$f_0(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ f(t), & 0 < t \leq T, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

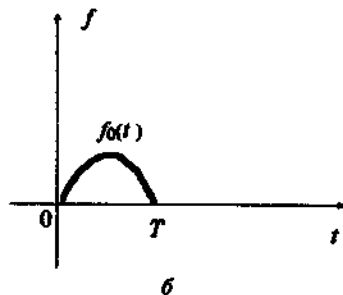
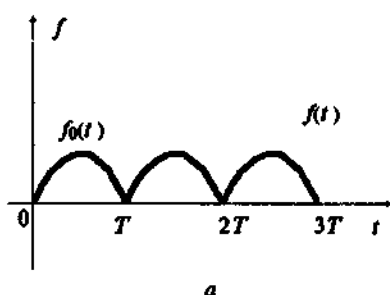


Рис.5.6

Для нахождения изображения $F(p)$ периодической функции $f(t)$ следует:

- 1) найти изображение функции $f_0(t)$: $F_0(p) = L[f_0(t)]$;
- 2) найти изображение $F(p)$ по формуле [25]

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-Tp}}. \quad (5.20)$$

Пример 5.23. Найти изображения функций, изображенных на рис.5.7.

Решение. а) По графику (рис.5.7, а) получаем

$$f_0(t) = t[I(t) - I(t-1)] = tI(t) - (t-1)I(t-1) - I(t-1).$$

Поэтому $F_0(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}e^{-p} - \frac{1}{p}e^{-p}$. Поскольку $T=1$, то по формуле (5.20) находим

$$F(p) = \frac{\frac{1}{p^2}(1 - e^{-p} - pe^{-p})}{1 - e^{-p}} = \frac{e^p(1 - e^{-p} - pe^{-p})}{p^2(e^p - 1)} = \frac{e^p - 1 - p}{p^2(e^p - 1)}.$$

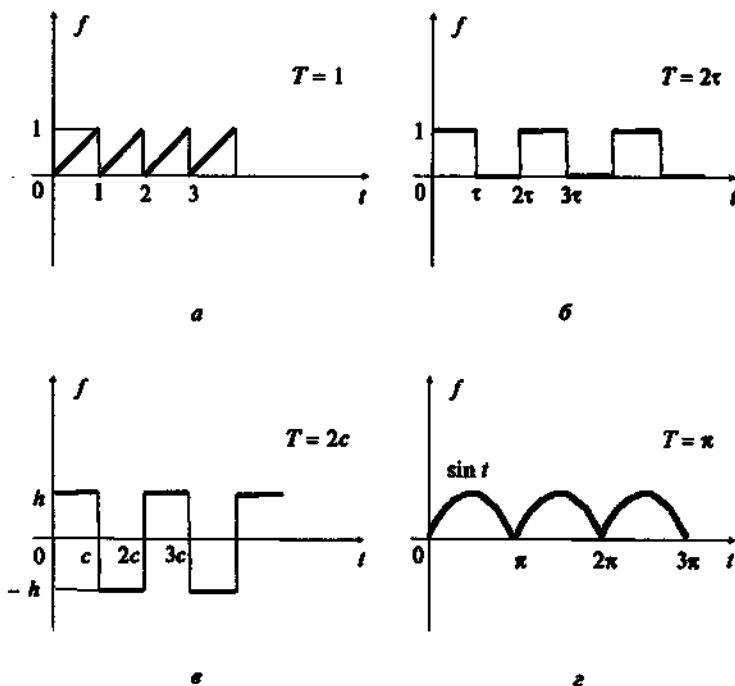


Рис.5.7

б) По графику (рис.5.7, б) имеем $f_0(t) = I(t) - I(t - \tau)$. Тогда $F_0(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\tau}$, а по формуле (5.20) при $T = 2\tau$

$$F(p) = \frac{\frac{1}{p}(1 - e^{-p\tau})}{1 - e^{-2p\tau}} = \frac{1}{p(1 + e^{-p\tau})}.$$

в) Функция, изображенная на рис.5.7, в, имеет период $T = 2c$. Используя представление

$$f_0(t) = h[I(t) - I(t - c)] - h[I(t - c) - I(t - 2c)] = hI(t) - 2hI(t - c) + hI(t - 2c),$$

получаем $F_0(p) = \frac{h}{p} - \frac{2h}{p} e^{-pc} + \frac{h}{p} e^{-2pc}$. По формуле (5.20)

$$F(p) = \frac{h(1 + e^{-2pc} - 2e^{-pc})}{p(1 - e^{-2pc})}.$$

г) Согласно п."ж" примера 5.22 $F_0(p) = \frac{1}{p^2 + 1} (1 + e^{-\pi p})$. Поэтому по формуле (5.20) при $T = \pi$ будем иметь

$$F(p) = \frac{(1 + e^{-\pi p})}{(p^2 + 1)(1 - e^{-\pi p})}.$$

5.1.4. Нахождение оригинала по изображению

Непосредственное применение формулы обращения (5.3) затруднительно, поэтому для нахождения оригинала применяются теоремы разложения или правила преобразования изображения к виду, представленному в табл.5.1.

Применение теорем разложения

Первая теорема разложения. Если функция $F(p)$ аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки и ее разложение в ряд по степеням

p имеет вид $F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}}$, то функция

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}, \quad t \geq 0 \quad (5.21)$$

является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$.

Вторая теорема разложения. Если изображение $F(p)$ является однозначной функцией и имеет лишь конечное число особых точек $p_1, p_2, \dots, p_n$, лежащих в конечной части плоскости, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p_k} [e^{pt} F(p)]. \quad (5.22)$$

В частном случае, когда $F(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, где $P_m(p)$, $Q_n(p)$ - многочлены степеней m и n соответственно, не имеющие общих корней, а все полюсы $p_1, p_2, \dots, p_n$ функции $F(p)$ простые, получаем

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{P_m(p_k)}{Q_n'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (5.23)$$

Пример 5.24. Найти оригиналы для следующих функций:

а) $F(p) = \frac{1}{p} e^{1/p^2}$; б) $F(p) = \frac{1}{p} \cos \frac{1}{p}$; в) $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sin \frac{1}{\sqrt{p}}$;

$$\text{г) } R(p) = \frac{2p+1}{p^2-p-6}; \quad \text{д) } F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}; \quad \text{е) } R(p) = \frac{p^2+p+1}{(p-1)(p+1)^2}.$$

Решение. а) Используя разложение $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, записываем

$$F(p) = \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4 2!} + \dots + \frac{1}{p^{2n} n!} + \dots \right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^5 2!} + \dots + \frac{1}{p^{2n+1} n!} + \dots$$

$$\text{Согласно первой теореме разложения } f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

б) Используя разложение $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, получаем

$$F(p) = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{2! p^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{p^{2n} (2n)!} + \dots \right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{2! p^3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{p^{2n+1} (2n)!} + \dots$$

$$\text{По первой теореме разложения } f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{[(2n)!]^2}.$$

в) Используя разложение $\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$, находим

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{\sqrt{p}} \left(\frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{p^3} 3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{p^{2n+1}} (2n+1)!} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2 3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)! p^{n+1}} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^{n+1} (2n+1)!}. \end{aligned}$$

$$\text{По первой теореме разложения } f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(2n+1)! n!}.$$

г) Представим $F(p)$ в виде

$$R(p) = \frac{2p+1}{p^2-p-6} = \frac{P_1(p)}{Q_2(p)} = \frac{2p+1}{(p-3)(p+2)},$$

где $p_1 = 3$, $p_2 = -2$ - простые полюсы $F(p)$. По второй теореме разложения

$$f(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{P_1(p_k)}{Q_2'(p_k)} e^{p_k t} = \sum_{k=1}^2 \frac{2p_k+1}{2p_k-1} e^{p_k t} = \frac{7}{5} e^{3t} + \frac{3}{5} e^{-2t}.$$

д) Функция $F(p)$ имеет четыре простых полюса: $p_1 = -1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 2i$, $p_4 = -2i$. Вычет в простом полюсе находится по формуле [25] $\operatorname{res}_{p_k} F(p) = \lim_{p \rightarrow p_k} F(p)(p - p_k)$, поэтому по второй теореме разложения

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^4 \operatorname{res}_{p_k} [F(p)e^{pt}] = \lim_{p \rightarrow -1} \left[\frac{p+2}{(p-2)(p^2+4)} e^{pt} \right] + \lim_{p \rightarrow 2} \left[\frac{p+2}{(p+1)(p^2+4)} e^{pt} \right] + \\ &+ \lim_{p \rightarrow 2i} \left[\frac{p+2}{(p-2)(p+1)(p-2i)} e^{pt} \right] + \lim_{p \rightarrow -2i} \left[\frac{p+2}{(p-2)(p+1)(p-2i)} e^{pt} \right] = \\ &= -\frac{1}{15} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{2t} + \frac{2+2i}{8-24i} e^{2it} + \frac{2-2i}{8+24i} e^{-2it} = -\frac{1}{15} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{2t} + \frac{-32+64i}{640} e^{2it} + \\ &+ \frac{-32-64i}{640} e^{-2it} = -\frac{1}{15} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{2t} - \frac{64}{640} \left[\frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} \right] - \frac{128}{640} \left[\frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} \right] = \\ &= -\frac{1}{15} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{2t} - \frac{1}{10} \cos 2t - \frac{1}{5} \sin 2t. \end{aligned}$$

е) Функция $F(p)$ имеет два полюса: простой $p_1 = 1$ и полюс второго порядка $p_2 = -1$. По второй теореме разложения

$$f(t) = \operatorname{res}_1 \frac{(p^2+p+1)e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2} + \operatorname{res}_{-1} \frac{(p^2+p+1)e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2}.$$

Аналогично пункту "д" для полюса $p_1 = 1$ имеем

$$\operatorname{res}_1 \frac{(p^2+p+1)e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2} = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{(p^2+p+1)(p-1)e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2} = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{(p^2+p+1)e^{pt}}{(p+1)^2} = \frac{3}{4} e^t.$$

Для вычисления вычета в точке $p_2 = -1$ - полюсе второго порядка - воспользуемся формулой [25] $\operatorname{res}_{p_k} F(p) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} [F(p)(p-p_k)^n]$, из которой при $n=2$ находим

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{-1} \frac{(p^2+p+1)e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2} &= \lim_{p \rightarrow -1} \frac{d}{dp} \left[\frac{(p^2+p+1)e^{pt}(p+1)^2}{(p-1)(p+1)^2} \right] = \\ &= \lim_{p \rightarrow -1} \frac{[(2p+1)e^{pt} + te^{pt}(p^2+p+1)](p-1) - (p^2+p+1)e^{pt}}{(p-1)^2} = \frac{1}{4} e^{-t} - \frac{1}{2} te^{-t}. \end{aligned}$$

В результате получаем $f(t) = \frac{3}{4} e^t + \frac{1}{4} e^{-t} - \frac{1}{2} te^{-t}$.

Применение таблицы и свойств преобразования Лапласа

Приведем ряд приемов нахождения оригинала.

1. Если изображение отличается от табличного на постоянный множитель, то его следует умножить и одновременно поделить на этот множитель, а затем воспользоваться свойством линейности.

Пример 5.25. Найти оригиналы для функций:

$$\text{а) } F(p) = \frac{3}{(p+2)^3}, \quad \text{б) } F(p) = \frac{5}{p^2-7}.$$

Решение. а) Запишем изображение в виде $F(p) = \frac{3}{2!} \frac{2!}{(p+2)^3}$. Следовательно, по формуле 7 из табл.5.1 при $a = -2$, $n = 2$ получаем $f(t) = \frac{3}{2} t^2 e^{-2t}$.

б) Представим изображение в форме $F(p) = \frac{5}{p^2-7} = \frac{5}{\sqrt{7}} \frac{\sqrt{7}}{p^2-(\sqrt{7})^2}$. Следовательно, по формуле 19 из табл.5.1 при $a = \sqrt{7}$ имеем $f(t) = \frac{5}{\sqrt{7}} \operatorname{sh} \sqrt{7} t$.

2. Изображение, заданное в виде дроби $\frac{a+b}{c}$, разлагается на сумму дробей.

Пример 5.26. Найти оригинал для функции $F(p) = \frac{3p-2}{(p+5)^2}$.

Решение. Представим дробь в виде двух слагаемых, а затем воспользуемся свойствами линейности и формулами 23 и 7 из табл.5.1:

$$F(p) = 3 \frac{p}{(p+5)^2} - \frac{2}{1!} \frac{1!}{(p+5)^2},$$

следовательно, $f(t) = 3(1-5t)e^{-5t} - 2te^{-5t} = e^{-5t}(3-17t)$.

3. Если знаменатель дроби содержит квадратный трехчлен, то в нем выделяется полный квадрат: $ap^2+bp+c = a(p \pm \alpha)^2 \pm \omega^2$. При этом числитель дроби представляется в виде многочлена от $(p \pm \alpha)$.

Пример 5.27. Найти оригиналы для функций:

$$\text{а) } F(p) = \frac{3}{p^2+4p+7}; \quad \text{б) } F(p) = \frac{3p+2}{2p^2-8p+6}.$$

Решение. а) Выделим полный квадрат в знаменателе дроби:

$$F(p) = \frac{3}{(p+2)^2-4+7} = \frac{3}{(p+2)^2+3} = \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{(p+2)^2+(\sqrt{3})^2},$$

следовательно, $f(t) = \sqrt{3} e^{-2t} \sin \sqrt{3} t$ по формуле 12 из табл.5.1 при $a = -2$, $b = \sqrt{3}$.

б) Используем представление

$$R(p) = \frac{3p+2}{2(p^2-4p+3)} = \frac{1,5p+1}{(p-2)^2-1} = \frac{1,5(p-2)+3}{(p-2)^2-1} + \frac{1}{(p-2)^2-1} =$$

$$= 1,5 \frac{p-2}{(p-2)^2-1} + 4 \frac{1}{(p-2)^2-1}.$$

Согласно формулам 19,20 из табл.5.1 и теореме смещения (формула (5.8) при $a=2$) $f(t) = 1,5 e^{2t} \operatorname{ch} t + 4 e^{2t} \operatorname{sh} t$.

4. Если оригинал представляет собой правильную рациональную дробь, то следует разложить ее на простейшие дроби и для каждой из полученных дробей найти оригинал.

Пример 5.28. Найти оригиналы для функций:

а) $F(p) = \frac{p^2+4}{(p-1)(p+2)(p-3)}$; б) $F(p) = \frac{p^3+2p+2}{p^3(p+1)}$; в) $F(p) = \frac{3p}{2p^2-2p-4}$;

г) $F(p) = \frac{3p^2+3p-13}{p(p^2+4p+13)}$; д) $F(p) = \frac{p}{(p+2)^2(p-1)}$.

Решение. а) Представим изображение в виде

$$F(p) = \frac{p^2+4}{(p-1)(p+2)(p-3)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p-3},$$

где A, B, C - неопределенные коэффициенты. Отсюда

$$A(p+2)(p-3) + B(p-1)(p-3) + C(p-1)(p+2) = p^2+4.$$

При $p=1$, $p=-2$, $p=3$ получаем $A = -\frac{5}{6}$, $B = \frac{8}{15}$, $C = \frac{13}{10}$ соответственно.

Поэтому $F(p) = -\frac{5}{6} \frac{1}{p-1} + \frac{8}{15} \frac{1}{p+2} + \frac{13}{10} \frac{1}{p-3}$.

Согласно свойству линейности и формуле 6 из табл. 5.1

$$f(t) = -\frac{5}{6} e^t + \frac{8}{15} e^{-2t} + \frac{13}{10} e^{3t}.$$

б) Представим $F(p)$ в виде

$$F(p) = \frac{p^3+2p+2}{p^3(p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p^3} + \frac{D}{p+1},$$

где A, B, C, D - неопределенные коэффициенты. Приводя дроби к общему знаменателю, получаем

$$Ap^2(p+1) + Bp(p+1) + C(p+1) + Dp^3 = p^3+2p+2.$$

При $p=0$, $p=-1$ получаем $C=2$, $D=1$ соответственно. Тогда

$$(A+1)p^3 + (A+B)p^2 + (B+2)p + 2 = p^3 + 2p + 2.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях p , получаем

$$A+1=1, A+B=0, B+2=2.$$

Отсюда $A=0$, $B=0$ и $R(p) = \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p+1}$. Согласно формулам 4,6 из табл.5.1

$$f(t) = t^2 + e^{-t}.$$

в) Представим $R(p)$ в виде

$$R(p) = \frac{3p}{2p^2 - 2p - 4} = \frac{3p}{2(p-2)(p+1)} = \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p+1},$$

где A, B - неопределенные коэффициенты. Отсюда $A(p+1) + B(p-2) = \frac{3p}{2}$.

При $p = -1$, $p = 2$ получаем $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$ соответственно. Поэтому

$$R(p) = \frac{1}{p-2} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+1}.$$

Согласно формуле 6 из табл.5.1 $f(t) = e^{2t} + \frac{1}{2} e^{-t}$.

г) Представим $F(p)$ в виде

$$F(p) = \frac{3p^2 + 3p - 13}{p(p^2 + 4p + 13)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 4p + 13},$$

где A, B, C - неопределенные коэффициенты. Отсюда

$$Ap^2 + 4Ap + 13A + Bp^2 + Cp = 3p^2 + 3p - 13$$

или

$$A+B=3, 4A+C=3, 13A=-13.$$

Получаем $A = -1$, $B = 4$, $C = 7$ и

$$\begin{aligned} F(p) &= -\frac{1}{p} + \frac{4p+7}{p^2+4p+13} = -\frac{1}{p} + \frac{4(p+2)-1}{(p+2)^2+9} = \\ &= -\frac{1}{p} + 4 \frac{p+2}{(p+2)^2+3^2} - \frac{1}{3} \frac{3}{(p+2)^2+3^2}. \end{aligned}$$

Согласно формулам 1,12,13 из табл.5.1

$$f(t) = -1 + 4e^{-2t} \cos 3t - \frac{1}{3} e^{-2t} \sin 3t.$$

д) Представим $F(p)$ в виде

$$F(p) = \frac{p}{(p+2)^2(p-1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{(p+2)^2},$$

где A, B, C - неопределенные коэффициенты. Отсюда

$$A(p+2)^2 + B(p-1)(p+2) + C(p-1) = p.$$

При $p = 1, p = -2, p = 0$ получаем $A = \frac{1}{9}, C = \frac{2}{3}, B = -\frac{1}{9}$ соответственно и

$$F(p) = \frac{1}{9} \frac{1}{p-1} - \frac{1}{9} \frac{1}{p+2} + \frac{2}{3} \frac{1}{(p+2)^2}.$$

Согласно формулам 6,7 из табл.5.1

$$f(t) = \frac{1}{9} e^t - \frac{1}{9} e^{-2t} + \frac{2}{3} t e^{-2t}.$$

5.2. Применение преобразования Лапласа

5.2.1. Решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и систем

Преобразование Лапласа может использоваться для решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений (см. разд.3) и линейных систем (см. разд.4). В данном разделе рассмотрены две задачи, наиболее часто встречающиеся в теории дифференциальных уравнений. Первая - задача Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения (3.7):

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = f(t), \quad (5.24)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \quad (5.25)$$

При этом предполагается, что функция $f(t)$, $t \geq 0$, принадлежит пространству оригиналов.

Вторая задача - задача Коши для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений (4.1):

$$X' = AX + F(t), \quad (5.26)$$

с начальными условиями

$$X(0) = X_0, \quad (5.27)$$

где, как и в разд.4,

$$X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T, \quad R(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T, \quad X_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что компоненты вектор-функций $R(t)$ и $X(t)$ принадлежат пространству оригиналов.

Для решения задач (5.24), (5.25) и (5.26), (5.27) можно применить аппарат *операционного исчисления* - метода решения задач, содержащего следующие этапы.

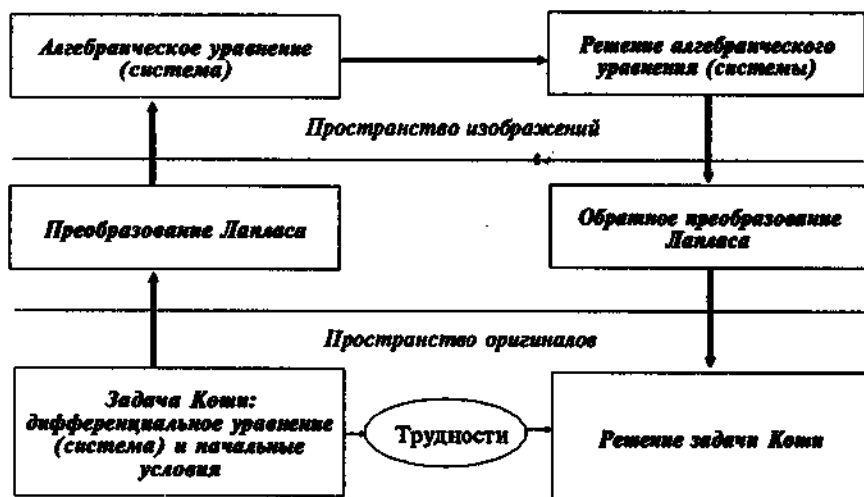


Рис.5.8

Алгоритм решения задачи Коши с помощью преобразования Лапласа

1. Применить преобразование Лапласа: от известных и неизвестных функций перейти к их изображениям, записать уравнение (систему) в изображениях, соответствующее решаемой задаче Коши.

2. Решить полученное уравнение (систему): найти изображение искомого решения.

3. Применить обратное преобразование Лапласа: найти оригинал для полученного в п.2 изображения.

З а м е ч а н и е 5.5.

1. Преимущество операционного метода заключается в том, что при его применении функции из пространства оригиналов и производимые над ними операции заменяются функциями и операциями в пространстве изображений, которые оказываются более простыми. Так, вместо дифференциальных уравнений решаются алгебраические уравнения (рис.5.8).

2. Начальные условия при записи уравнений в изображениях учитываются автоматически, и нет необходимости решать систему для нахождения произвольных постоянных, как это делается при применении классического метода.

3. Операционное исчисление позволяет найти не только частное, но и общее решение уравнения (5.24). Для этого достаточно положить $x^{(k)}(0) = C_k$, $k = 0, \dots, n-1$. При нахождении общего решения системы (5.26) следует принять $x_i(0) = C_i$, $i = 1, \dots, n$.

4. Операционное исчисление можно применять для широкого класса кусочно-непрерывных функций $f(t)$ и функций, заданных графически; для решения уравнений с переменными коэффициентами, уравнений в частных производных, интегральных и интегродифференциальных уравнений; для вычисления несобственных интегралов и суммирования рядов.

5. При решении уравнения (системы) для изображений не следует приводить дроби к общему знаменателю, так как следующий этап - нахождение оригинала - связан с представлением дробей в виде суммы.

Пример 5.29. Решить задачу Коши:

$$x' + x = f(t), \quad x(0) = \frac{1}{2}.$$

Решение. 1. Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$L[x(t)] = X(p), \quad L[x'(t)] = pX(p) - \frac{1}{2}, \quad L[f(t)] = \frac{1}{p}.$$

Здесь использованы формулы (5.11) и 1 из табл. 5.1. Запишем уравнение для изображений: $pX(p) - \frac{1}{2} + X(p) = \frac{1}{p}$.

2. Решим уравнение для изображений:

$$pX(p) + X(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}, \quad X(p) = \frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{2}}{p+1} = \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+1}.$$

3. Найдем оригинал для функции $X(p)$. Применяя формулы 15, 6 из табл. 5.1, получаем

$$x(t) = L^{-1}[X(p)] = \frac{1}{-1} (e^{-t} - 1) + \frac{1}{2} e^{-t} = 1 - \frac{1}{2} e^{-t}.$$

Заметим, что результат совпадает с полученным в примере 3.23.

Пример 5.30. Решить задачу Коши:

$$x' + 2x = -3t + 2, \quad x(0) = 0.$$

Решение. 1. Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$L[x(t)] = X(p), \quad L[x'(t)] = pX(p) - 0 = pX(p), \quad L[f(t)] = L[-3t + 2] = -\frac{3}{p^2} + \frac{2}{p}.$$

Здесь использованы формулы 3,2 из табл. 5.1. и (5.11). Запишем уравнение для изображений: $pX(p) + 2X(p) = -\frac{3}{p^2} + \frac{2}{p}$.

2. Решим уравнение для изображений:

$$X(p) = -\frac{3}{p^2(p+2)} + \frac{2}{p(p+2)}.$$

3. Найдем оригинал для функции $X(p)$. Применяя формулы 18, 15 из табл.5.1, получаем

$$x(t) = -3\frac{1}{4}(e^{-2t} - 1 + 2t) + \frac{2}{-2}(e^{-2t} - 1) = 1,75 - 1,5t - 1,75e^{-2t}.$$

Заметим, что результат совпадает с полученным в примере 3.18.

Пример 5.31. Решить задачу Коши:

$$x'' - 3x' + 2x = 2e^{3t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 3.$$

Решение. 1. Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$L[x(t)] = X(p), \quad L[x'(t)] = pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$

$$L[x''(t)] = p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - p - 3, \quad L[f(t)] = L[2e^{3t}] = \frac{2}{p-3}.$$

Запишем уравнение для изображений:

$$p^2 X(p) - p - 3 - 3pX(p) + 3 + 2X(p) = \frac{2}{p-3}.$$

2. Решим уравнение для изображений:

$$p^2 X(p) - 3pX(p) + 2X(p) = \frac{2}{p-3} + p,$$

$$X(p) = \frac{2}{(p-3)(p^2-3p+2)} + \frac{p}{p^2-3p+2} = \frac{2+p^2-3p}{(p^2-3p+2)(p-3)} = \frac{1}{p-3}.$$

3. Найдем оригинал для функции $X(p)$: $x(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{p-3}\right] = e^{3t}$.

Заметим, что результат совпадает с полученным в примере 3.24.

Пример 5.32. Решить задачу Коши:

$$x'' + 4x = \cos 2t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1.$$

Решение. 1. Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$L[x(t)] = X(p), \quad L[x''(t)] = p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - p + 1,$$

$$L[f(t)] = L[\cos 2t] = \frac{p}{p^2 + 4}.$$

Запишем уравнение для изображений: $p^2 X(p) - p + 1 + 4X(p) = \frac{p}{p^2 + 4}.$

2. Решим уравнение для изображений:

$$p^2 X(p) + 4X(p) = \frac{p}{p^2 + 4} + p - 1, \quad X(p) = \frac{p}{(p^2 + 4)^2} + \frac{p}{p^2 + 4} - \frac{1}{p^2 + 4}.$$

3. Применяя формулы 10, 9, 8 из табл.5.1, найдем оригинал для функции $X(p): x(t) = \frac{1}{4} t \sin 2t + \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t.$

Заметим, что результат совпадает с полученным в примере 3.20.

Пример 5.33. Решить задачи Коши:

а) $x''' + x' = 0, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0, \quad x''(0) = -1;$

б) $x''' + 6x'' + 11x' + 6x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -3, \quad x''(0) = 9.$

Решение. а) Воспользуемся алгоритмом.

1. Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$L[x(t)] = X(p); \quad L[x'''(t)] = p^3 X(p) - p^2 x(0) - px'(0) - x''(0) = p^3 X(p) - 2p^2 + 1; \\ L[0] = 0.$$

Запишем уравнение для изображений: $p^3 X(p) - 2p^2 + 1 + pX(p) - 2 = 0.$

2. Решим уравнение для изображений:

$$p^3 X(p) + pX(p) = 2p^2 + 1, \quad X(p) = \frac{2p^2 + 1}{p^3 + p} = \frac{p^2 + 1}{p(p^2 + 1)} + \frac{p^2}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 1}.$$

3. Применяя формулы 1, 9 из табл.5.1, найдем оригинал для функции $X(p): x(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 1}\right] = 1 + \cos t.$

б) Решим вторую задачу, пользуясь алгоритмом.

1. Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$L[x(t)] = X(p); \quad L[x'(t)] = pX(p) - x(0) = pX(p) - 1;$$

$$L[x''(t)] = p^2 X(p) - px'(0) - x''(0) = p^2 X(p) - p + 3;$$

$$L[x'''(t)] = p^3 X(p) - p^2 x(0) - px'(0) - x''(0) = p^3 X(p) - p^2 + 3p - 9; \quad L[0] = 0.$$

Запишем уравнение для изображений:

$$p^3 X(p) - p^2 + 3p - 9 + 6p^2 X(p) - 6p + 18 + 11pX(p) - 11 + 6X(p) = 0.$$

2. Решим уравнение для изображений:

$$X(p) = \frac{p^2 + 3p + 2}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6} = \frac{1}{p+3}.$$

3. Найдем оригинал для функции $X(p)$: $x(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{p+3}\right] = e^{-3t}$.

Заметим, что результат совпадает с полученным в п.1 примера 3.26.

Пример 5.34. Решить задачу Коши:

$$x''' - 3x'' + 3x' - x = e^t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1, \quad x''(0) = 1.$$

Решение. 1. Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$L[x(t)] = X(p); \quad L[x'(t)] = pX(p) - x(0) = pX(p) - 1;$$

$$L[x''(t)] = p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - p + 1;$$

$$L[x'''(t)] = p^3 X(p) - p^2 x(0) - px'(0) - x''(0) = p^3 X(p) - p^2 + p - 1; \quad L[e^t] = \frac{1}{p-1}.$$

Запишем уравнение для изображений:

$$p^3 X(p) - p^2 + p - 1 - 3p^2 X(p) + 3p - 3 + 3pX(p) - 3 - X(p) = \frac{1}{p-1}.$$

2. Решим уравнение для изображений:

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{(p-1)^4} + \frac{p^2 - 4p + 7}{(p-1)^3} = \frac{1}{(p-1)^4} + \frac{(p-1)^2}{(p-1)^3} - \frac{2(p-1)}{(p-1)^3} + \frac{4}{(p-1)^3} = \\ &= \frac{1}{(p-1)^4} + \frac{1}{p-1} - \frac{2}{(p-1)^2} + \frac{4}{(p-1)^3} = \frac{1}{6} \frac{3!}{(p-1)^4} + \frac{1}{p-1} - 2 \frac{1}{(p-1)^2} + 2 \frac{2}{(p-1)^3}. \end{aligned}$$

3. По формулам 7, 6 из табл. 5.1 найдем оригинал для функции $X(p)$:

$$x(t) = e^t \left(\frac{1}{6} t^3 + 1 - 2t + 2t^2 \right).$$

Заметим, что результат совпадает с полученным в примере 3.21.

Пример 5.35. Решить задачу Коши:

$$x' = x + 2y - 9t, \quad x(0) = 1,$$

$$y' = 2x + y + 4e^t, \quad y(0) = 2.$$

Решение. 1. Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$L[x(t)] = X(p); \quad L[y(t)] = Y(p); \quad L[x'(t)] = pX(p) - x(0) = pX(p) - 1;$$

$$L[y'(t)] = pY(p) - y(0) = pY(p) - 2; \quad L[9t] = \frac{9}{p^2}; \quad L[4e^t] = \frac{4}{p-1}.$$

Запишем систему уравнений для изображений:

$$pX(p) - 1 = X(p) + 2Y(p) - \frac{9}{p^2},$$

$$pX(p) - 2 = 2X(p) + Y(p) + \frac{4}{p-1}.$$

2. Решим систему уравнений для изображений.

Из первого уравнения выразим $X(p)$: $X(p) = \frac{2Y(p)}{p-1} + \frac{1}{p-1} - \frac{9}{p^2(p-1)}$ и подставим во второе:

$$pX(p) - 2 = \frac{4Y(p)}{p-1} + \frac{2}{p-1} - \frac{18}{p^2(p-1)} + Y(p) + \frac{4}{p-1}.$$

$$\text{Отсюда } Y(p) = \frac{2(p-1)}{(p+1)(p-3)} + \frac{6}{(p+1)(p-3)} - \frac{18}{p^2(p+1)(p-3)}. \text{ Учтем, что}$$

$$\frac{2(p-1)}{(p+1)(p-3)} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p-3}, \quad \frac{6}{(p+1)(p-3)} = -\frac{3}{2} \frac{1}{p+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{p-3},$$

$$\frac{18}{p^2(p+1)(p-3)} = \frac{4}{p} - \frac{6}{p^2} - \frac{9}{2} \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{p-3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p-3} - \frac{3}{2} \frac{1}{p+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{p-3} - \frac{4}{p} + \frac{6}{p^2} + \frac{9}{2} \frac{1}{p+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{p-3} = \\ &= -\frac{4}{p} + \frac{6}{p^2} + \frac{4}{p+1} + 2 \frac{1}{p-3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(p) &= -\frac{8}{p(p-1)} + \frac{12}{p^2(p-1)} + \frac{8}{(p+1)(p-1)} + 4 \frac{1}{(p-3)(p-1)} + \frac{1}{p-1} - \frac{9}{p^2(p-1)} = \\ &= \frac{1}{p-1} - \frac{8}{p(p-1)} + \frac{8}{(p+1)(p-1)} + \frac{4}{(p-3)(p-1)} + \frac{3}{p^2(p-1)}. \end{aligned}$$

$$\text{Поскольку } \frac{3}{p^2(p-1)} = -\frac{3}{p} - \frac{3}{p^2} + \frac{3}{p-1}, \text{ то}$$

$$X(p) = \frac{4}{p-1} - \frac{3}{p} - \frac{3}{p^2} - \frac{8}{p(p-1)} + \frac{8}{(p+1)(p-1)} + \frac{4}{(p-3)(p-1)}.$$

3. По формулам 6, 2, 3, 15, 16 из табл.5.1 найдем оригиналы для функций $X(p)$ и $Y(p)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1}[X(p)] = 4e^t - 3 - 3t - 8e^t + 8 - 4e^{-t} + 4e^t + 2e^{3t} - 2e^t = \\ &= 2e^{3t} - 4e^{-t} - 2e^t + 5 - 3t; \quad y(t) = L^{-1}[Y(p)] = -4 + 6t + 4e^{-t} + 2e^{3t}. \end{aligned}$$

Заметим, что результат совпадает с полученным в примере 4.43.

Пример 5.36. Решить задачу Коши:

$$\begin{aligned}x' &= y - 1, & x(0) &= 1, \\y' &= -x - 2y, & y(0) &= -1.\end{aligned}$$

Решение. 1. Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$\begin{aligned}L\{x(t)\} &= X(p); \quad L\{y(t)\} = Y(p); \quad L\{x'(t)\} = pX(p) - x(0) = pX(p) - 1; \\L\{y'(t)\} &= pY(p) - y(0) = pY(p) + 1; \quad L\{1(t)\} = \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

Залишем систему уравнений для изображений:

$$\begin{aligned}pX(p) - 1 &= Y(p) - \frac{1}{p}, \\pY(p) + 1 &= -X(p) - 2Y(p).\end{aligned}$$

2. Решим систему уравнений для изображений.

Умножим второе уравнение на p , а из первого выразим $pX(p)$:

$$pX(p) = Y(p) + 1 - \frac{1}{p}, \quad p^2Y(p) + p = -pX(p) - 2pY(p).$$

Отсюда $p^2Y(p) + p = -Y(p) - 1 + \frac{1}{p} - 2pY(p)$ или

$$Y(p) = \frac{\frac{1}{p} - 1 - p}{p^2 + 2p + 1} = \frac{1}{p(p+1)^2} - \frac{1}{p+1}.$$

Из второго уравнения системы

$$X(p) = -1 - (p+2)Y(p) = -1 - (p+1)Y(p) - Y(p) = -\frac{1}{p(p+1)} - \frac{1}{p(p+1)^2} + \frac{1}{p+1}.$$

Представим

$$\frac{1}{p(p+1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2},$$

где A, B, C - неопределенные коэффициенты. Отсюда находим

$$A(p+1)^2 + Bp(p+1) + Cp = 1.$$

При $p = -1$, $p = 0$ и $p = 1$ последовательно получаем $C = -1$, $A = 1$,

$B = -1$: $\frac{1}{p(p+1)^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2}$. Поэтому

$$X(p) = -\frac{1}{p(p+1)} - \frac{1}{p} + \frac{2}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}, \quad Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{2}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2}.$$

3. По формулам 15, 6, 7 из табл.5.1 найдем оригиналы для функций $X(p)$

и $Y(p): x(t) = 2e^{-t} - 2 + e^{-t} + te^{-t} = 3e^{-t} + te^{-t} - 2$, $y(t) = 1 - 2e^{-t} - te^{-t}$.
Заметим, что результат совпадает с полученным в примере 4.48.

Пример 5.37. Решить задачу Коши:

$$x_1' = -x_2 + 2, \quad x_1(0) = -1,$$

$$x_2' = x_1 + 1, \quad x_2(0) = 0.$$

Решение. 1. Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$L[x_1(t)] = X_1(p); \quad L[x_2(t)] = X_2(p); \quad L[x_1'(t)] = pX_1(p) - x_1(0) = pX_1(p) + 1;$$

$$L[x_2'(t)] = pX_2(p) - x_2(0) = pX_2(p); \quad L[1] = \frac{1}{p}; \quad L[2] = \frac{2}{p}.$$

Запишем систему уравнений для изображений:

$$pX_1(p) + 1 = -X_2(p) + \frac{2}{p},$$

$$pX_2(p) = X_1(p) + \frac{1}{p}.$$

2. Решим систему уравнений для изображений. Для этого умножим первое уравнение на p и подставим во второе:

$$p^2 X_1(p) + p = -X_1(p) - \frac{1}{p} + 2.$$

$$\text{Отсюда } X_1(p) = \frac{2}{p^2 + 1} - \frac{1}{p}, \quad X_2(p) = -\frac{2p}{p^2 + 1} + 1 - 1 + \frac{2}{p} = -\frac{2p}{p^2 + 1} + \frac{2}{p}.$$

3. По формулам 8, 2, 9 из табл.5.1 найдем оригиналы для функций $X_1(p)$, $X_2(p)$: $x_1(t) = 2 \sin t - 1$, $x_2(t) = 2 - 2 \cos t$.

Заметим, что результат совпадает с полученным в примере 4.47.

З а м е ч а н и е 5.6. Во многих практических задачах правая часть дифференциального уравнения задается графически. В этом случае алгоритм решения задачи не изменяется, а для нахождения изображения оригинала, заданного графиком, используются методы, изложенные в разд.5.1.3.

Пример 5.38. Решить задачу Коши:

$$x' + x = f(t), \quad x(0) = 0,$$

где $f(t)$ - функция, изображенная на рис.5.9, а.

Решение. 1. Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$L[x(t)] = X(p); \quad L[x'(t)] = pX(p) - x(0) = pX(p).$$

Поскольку $f(t) = I(t) - I(t-2)$ (см. рис.5.2), то по свойству запаздывания

$$F(p) = L[f(t)] = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-2p}.$$

Запишем уравнение для изображений:

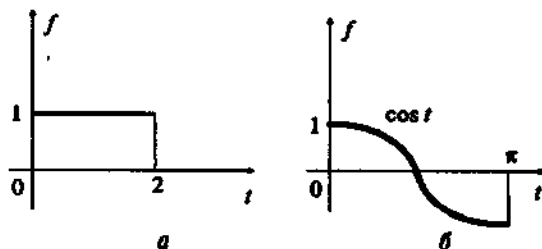


Рис.5.9

$$pX(p) + X(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-2p}.$$

2. Решим уравнение для изображений:

$$X(p) = \frac{1}{p(p+1)} - \frac{1}{p(p+1)} e^{-2p}.$$

3. Найдем оригинал для функции $X(p)$. Первому слагаемому по формуле 15 из табл.5.1 соответствует оригинал $1 - e^{-t}$. Оригиналу для второго слагаемого находится по теореме запаздывания (5.9), поэтому

$$x(t) = 1 - e^{-t} - [1 - e^{-(t-2)}]I(t-2).$$

Пример 5.39. Решить задачу Коши:

$$x'' + x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

где $f(t)$ - функция, изображенная на рис.5.9, б.

Решение. 1. Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$L[x(t)] = X(p); \quad L[x'(t)] = pX(p) - x(0) = pX(p);$$

$$L[x''(t)] = p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p).$$

Поскольку функцию $f(t)$ можно записать в виде

$$f(t) = \cos t [I(t) - I(t - \pi)] = \cos t + \cos(t - \pi) I(t - \pi),$$

то по формуле 9 из табл.5.1 и теореме запаздывания (5.9)

$$F(p) = L[f(t)] = \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{p}{p^2 + 1} e^{-\pi p}.$$

Запишем уравнение для изображений:

$$p^2 X(p) + X(p) = \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{p}{p^2 + 1} e^{-\pi p}.$$

2. Решим уравнение для изображений:

$$X(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2} + \frac{p}{(p^2 + 1)^2} e^{-\pi p}.$$

3. Найдем оригинал для функции $X(p)$ по формуле 10 из табл.5.1 и теореме запаздывания (5.9): $x(t) = \frac{1}{2} t \sin t + \frac{1}{2} (t - \pi) \sin (t - \pi) I(t - \pi)$.

Пример 5.40. Решить задачу Коши:

$$x'' - x' = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

где $f(t)$ - функция, изображенная на рис.5.5, з.

Решение. 1. Аналогично примеру 5.39 перейдем от оригиналов к изображениям:

$$L\{x(t)\} = X(p); \quad L\{x'(t)\} = pX(p); \quad L\{x''(t)\} = p^2 X(p).$$

Согласно результату примера 5.22, п."з": $L\{f(t)\} = \frac{1}{p+1} (1 - e^{-p-1})$.

Запишем уравнение для изображений:

$$p^2 X(p) - pX(p) = \frac{1}{p+1} (1 - e^{-p-1}).$$

2. Решим уравнение для изображений:

$$X(p) = \frac{1}{p(p+1)(p-1)} - \frac{1}{e} \frac{1}{p(p+1)(p-1)} e^{-p}.$$

3. Найдем оригинал для функции $X(p)$. Поскольку

$$\frac{1}{p(p+1)(p-1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{p-1},$$

$$\text{то } x(t) = -1 + \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{e} I(t-1) \left[-1 + \frac{1}{2} e^{-(t-1)} + \frac{1}{2} e^{(t-1)} \right].$$

Пример 5.41. Решить задачу Коши:

$$x'' + x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

где $f(t)$ - функция, изображенная на рис.5.5, и.

Решение. 1. Перейдем от оригиналов к изображениям: $L\{x(t)\} = X(p)$; $L\{x''(t)\} = p^2 X(p)$.

Согласно результату примера 5.22, п."и": $L\{f(t)\} = \frac{1}{p} - \frac{2}{p} e^{-p} + \frac{1}{p} e^{-2p}$.

Запишем уравнение для изображений:

$$p^2 X(p) + X(p) = \frac{1}{p} - \frac{2}{p} e^{-p} + \frac{1}{p} e^{-2p}.$$

2. Решим уравнение для изображений:

$$X(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)} - \frac{2}{p(p^2 + 1)} e^{-p} + \frac{1}{p(p^2 + 1)} e^{-2p}.$$

3. Найдем оригинал для функции $X(p)$. По формуле 17 из табл.5.1 с учетом теоремы запаздывания (5.9) получаем

$$x(t) = 1 - \cos t - 2[1 - \cos(t-1)]I(t-1) + [1 - \cos(t-2)]I(t-2).$$

Пример 5.42. Решить задачу Коши:

$$x'' + 9x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1,$$

где $f(t)$ - функция, изображенная на рис.5.5, г.

Решение. 1. Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$L[x(t)] = X(p); \quad L[x''(t)] = p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - 1.$$

Согласно результату примера 5.22, п."г": $L[f(t)] = \frac{e^{-p}}{p^2} - 2\frac{e^{-2p}}{p^2} + \frac{e^{-3p}}{p^2}.$

Запишем уравнение для изображений:

$$p^2 X(p) - 1 + 9X(p) = \frac{1}{p^2} (e^{-p} - 2e^{-2p} + e^{-3p}).$$

2. Решим уравнение для изображений:

$$X(p) = \frac{1}{p^2 + 9} + \frac{1}{p^2(p^2 + 9)} (e^{-p} - 2e^{-2p} + e^{-3p}).$$

3. Найдем оригинал для функции $X(p)$. Заметим, что

$$\frac{1}{p^2(p^2 + 9)} = \frac{1}{9} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{9} \frac{1}{p^2 + 9}.$$

Согласно формулам 8, 3 из табл.5.1 этому изображению соответствует оригинал $\frac{1}{9}t - \frac{1}{27}\sin 3t$. Раскрывая скобки во втором слагаемом $X(p)$ и применяя теорему запаздывания при $\tau = 1, \tau = 2, \tau = 3$, получаем

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{3} \sin 3t + \left[\frac{1}{9}(t-1) - \frac{1}{27} \sin 3(t-1) \right] I(t-1) - \\ & - \left[\frac{2}{9}(t-2) - \frac{2}{27} \sin 3(t-2) \right] I(t-2) + \left[\frac{1}{9}(t-3) - \frac{1}{27} \sin 3(t-3) \right] I(t-3). \end{aligned}$$

Применение интеграла Дюамеля и теоремы Бореля

Рассмотрим проблему решения дифференциального уравнения (5.24) с нулевыми начальными условиями:

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \dots, x^{(n-1)}(0) = 0. \quad (5.28)$$

Приведем два способа ее решения, применение которых не требует нахождения изображения правой части $f(t)$ дифференциального уравнения.

Первый способ. Наряду с уравнением (5.24) рассмотрим получающееся из него при $f(t) = I(t)$ с нулевыми начальными условиями, то есть

$$\begin{aligned} a_n h^{(n)} + \dots + a_0 h &= I(t), \\ h(0) &= 0, \quad h'(0) = 0, \dots, h^{(n-1)}(0) = 0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Функция $h(t)$ называется единичной переходной функцией (см. также разд. 3.1.2.4). Применим к задачам (5.24), (5.28) и (5.29) способ решения задачи Коши, описанный в данном разделе.

Перейдем от изображений к оригиналам:

$$L[x(t)] = X(p), \quad L[h(t)] = H(p), \quad L[f(t)] = F(p), \quad L[I(t)] = \frac{1}{p}.$$

Так как начальные условия нулевые, то

$$L[x^{(k)}(t)] = p^k X(p), \quad L[h^{(k)}(t)] = p^k H(p), \quad k = 1, \dots, n.$$

В результате получаем уравнения в изображениях, соответствующие уравнениям (5.24) и (5.29):

$$D(p)X(p) = F(p), \quad D(p)H(p) = \frac{1}{p},$$

где $D(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0$ - характеристический многочлен. Исключая $D(p)$, находим

$$X(p) = p H(p) F(p).$$

Используя интеграл Дюамеля (5.17), можно найти оригинал в виде

$$x(t) = h(0)f(t) + \int_0^t h'(\tau)f(t-\tau) d\tau.$$

Так как из (5.29) следует, что $h(0) = 0$, то окончательно получаем

$$x(t) = \int_0^t h'(\tau)f(t-\tau) d\tau. \quad (5.30)$$

На основании (5.30) можно сформулировать алгоритм решения следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} a_n x^{(n)} + \dots + a_0 x &= f(t), \\ x(0) = 0, x'(0) = 0, \dots, x^{(n-1)}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Алгоритм решения задачи Коши с помощью интеграла Дюамеля

1. Найти единичную переходную функцию $h(t)$, решая задачу (5.29). Для этого можно применить операционное исчисление или другие методы [33].
2. Найти производную $h'(t)$ единичной переходной функции.
3. Определить решение задачи (5.31) по формуле (5.30).

Второй способ. Обозначим через $K(t)$ решение уравнения (5.24) при $f(t) = \delta(t)$ с нулевыми начальными условиями, то есть

$$\begin{aligned} a_n K^{(n)} + \dots + a_0 K &= \delta(t), \\ K(0) = 0, K'(0) = 0, \dots, K^{(n-1)}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Функция $K(t)$ называется импульсной переходной функцией (см. также разд. 3.1.2.4).

Рассмотрим решение задач Коши (5.31), (5.32) с помощью операционного исчисления. Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$L[x(t)] = X(p), L[K(t)] = K(p), L[f(t)] = F(p), L[\delta(t)] = 1.$$

Так как начальные условия нулевые, то

$$L[x^{(k)}(t)] = p^k X(p), L[K^{(k)}(t)] = p^k K(p), k = 1, \dots, n.$$

В результате получаем

$$D(p)X(p) = F(p), D(p)K(p) = 1,$$

где $D(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0$. Отсюда

$$X(p) = K(p)F(p).$$

Согласно теореме Бореля можно найти оригинал по формуле (5.15):

$$x(t) = \int_0^t K(\tau) f(t - \tau) d\tau = \int_0^t K(t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (5.33)$$

Сравнение (5.30) и (5.33) показывает, что между переходными функциями имеется связь, установленная ранее в разд. 3.2.4:

$$K(t) = h'(t). \quad (5.34)$$

На основании формулы (5.33) можно сформулировать алгоритм решения задачи (5.31).

Алгоритм решения задачи Коши с помощью теоремы Бореля

1. Найти импульсную переходную функцию, решая задачу Коши (5.32). Для этого можно применить операционное исчисление или другие методы [33].

2. По формуле (5.33) найти решение задачи Коши (5.31).

Пример 5.43. Решить задачу Коши:

$$x' + x = e^t, \quad x(0) = 0.$$

Решение. Первый способ.

1. Составим уравнение для нахождения единичной переходной функции и решим его, применяя операционное исчисление:

$$h' + h = 1, \quad h(0) = 0.$$

$$a) \quad L[h(t)] = H(p), \quad L[h'(t)] = pH(p), \quad L[1(t)] = \frac{1}{p}, \quad pH(p) + H(p) = \frac{1}{p};$$

$$б) \quad H(p) = \frac{1}{p(p+1)};$$

$$в) \quad h(t) = L^{-1}[H(p)] = 1 - e^{-t}.$$

2. Найдем производную единичной переходной функции:

$$h'(t) = e^{-t}.$$

3. По формуле (5.30) при $f(t) = e^t$

$$x(t) = \int_0^t e^{-\tau} e^{(t-\tau)} d\tau = e^t \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = -\frac{1}{2} e^t e^{-2\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}).$$

Второй способ.

1. Составим уравнение для нахождения импульсной переходной функции и решим его, применяя операционное исчисление:

$$K' + K = \delta(t), \quad K(0) = 0.$$

$$a) \quad L[K(t)] = K(p), \quad L[K'(t)] = pH(p), \quad L[\delta(t)] = 1, \quad pH(p) + K(p) = 1;$$

$$б) \quad K(p) = \frac{1}{p+1};$$

$$в) \quad K(t) = L^{-1}[K(p)] = e^{-t}.$$

2. По формуле (5.33) при $f(t) = e^t$

$$x(t) = \int_0^t e^{-\tau} e^{(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}).$$

Пример 5.44. Решить задачу Коши:

$$x' + 2x = -3t + 2, \quad x(0) = 0.$$

Решение. 1. Составим уравнение для нахождения единичной переходной функции и решим его:

$$h' + 2h = 1, \quad h(0) = 0.$$

$$а) L[h(t)] = H(p), \quad L[h'(t)] = pH(p), \quad L[1(t)] = \frac{1}{p}, \quad pH(p) + 2H(p) = \frac{1}{p};$$

$$б) H(p) = \frac{1}{p(p+2)};$$

$$в) h(t) = L^{-1}[H(p)] = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}).$$

2. Найдем производную от единичной переходной функции:

$$h'(t) = e^{-2t}.$$

3. По формуле (5.30) при $f(t) = -3t + 2$ получаем

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t e^{-2\tau} [2 - 3(t - \tau)] d\tau = (2 - 3t) \int_0^t e^{-2\tau} d\tau + 3 \int_0^t \tau e^{-2\tau} d\tau = \\ &= \frac{-2 + 3t}{2} e^{-2\tau} \Big|_0^t - \frac{3}{2} \tau e^{-2\tau} \Big|_0^t + \frac{3}{2} \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = \left(-1 + \frac{3}{2}t\right) e^{-2t} - \frac{3}{2}t + 1 - \\ &\quad - \frac{3}{2}te^{-2t} + 0 - \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{3}{4} = 1,75 - 1,5t - 1,75e^{-2t}. \end{aligned}$$

Заметим, что результат совпадает с полученным в примерах 3.18 и 5.30.

З а м е ч а н и е 5.7. При решении прикладных задач, в частности задачи анализа выходных процессов линейных динамических систем [33], возникает необходимость в решении задачи, более общей по сравнению с (5.24), (5.25):

$$\begin{aligned} a_n x^{(n)} + \dots + a_0 x &= b_m g^{(m)}(t) + \dots + b_0 g(t), \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(0) &= x_0^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

где $g(t)$ - заданная функция; $a_n, \dots, a_0, b_m, \dots, b_0$ - постоянные коэффициенты, n и m - числа, определяющие порядок старшей производной в левой и правой части уравнения.

Как описано в разд.1.2, в процедуре решения задачи используется *принцип суперпозиции*: эффект, вызываемый суммой нескольких факторов (начальными условиями и функцией $g(t)$), равен сумме эффектов каждого из факторов в отдельности.

Алгоритм решения задачи (5.35) с помощью принципа суперпозиции

1. Найти решение однородного уравнения (при $g(t) = 0$), соответствующего уравнению (5.35) с заданными начальными условиями:

$$\begin{aligned} a_n x^{(n)} + \dots + a_0 x &= 0, \\ x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(0) &= x_0^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Для этого может применяться как операционное исчисление, так и другие методы [32]. Полученное решение называется свободным движением и обозначается $x_{св}(t)$. Оно характеризует влияние начальных условий. Если начальные условия нулевые, свободное движение отсутствует, то есть $x_{св}(t) \equiv 0$.

2. Найти решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями:

$$\begin{aligned} a_n x^{(n)} + \dots + a_0 x &= b_m g^{(m)}(t) + \dots + b_0 g(t), \\ x(0) = 0, x'(0) = 0, \dots, x^{(n-1)}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Полученное решение называется вынужденным движением и обозначается $x_{вын}(t)$. Оно характеризует влияние функции $g(t)$. Для нахождения вынужденного движения следует:

а) найти импульсную переходную функцию $K_0(t)$ для уравнения

$$a_n x^{(n)} + \dots + a_0 x = f(t).$$

Для этого решить задачу (5.32) с применением операционного исчисления:

$$\begin{aligned} a_n K_0^{(n)} + \dots + a_0 K_0 &= \delta(t), \\ K_0(0) = 0, K_0'(0) = 0, \dots, K_0^{(n-1)}(0) &= 0; \end{aligned} \quad (5.38)$$

б) найти импульсную переходную функцию $K(t)$ для уравнения

$$a_n x^{(n)} + \dots + a_0 x = b_m g^{(m)}(t) + \dots + b_0 g(t)$$

по формуле

$$K(t) = b_m K_0^{(m)}(t) + \dots + b_0 K_0(t); \quad (5.39)$$

в) найти вынужденное движение по формуле, аналогичной (5.33):

$$x_{вын}(t) = \int_0^t K(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (5.40)$$

3. Найти решение задачи (5.35) в виде суммы свободного и вынужденного движений:

$$x(t) = x_{св}(t) + x_{вын}(t). \quad (5.41)$$

Пример 5.45. Найти решение задачи:

$$x'' - 3x' + 2x = g'(t) - g(t), \quad g(t) = e^{-3t} I(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Решение. Решим задачу, следуя алгоритму.

1. Найдем решение $x_{св}(t)$ уравнения (5.36):

$$x'' - 3x' + 2x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Поскольку начальные условия нулевые, то $x_{св}(t) = 0$.

2. Найдем решение уравнения (5.37):

$$x'' - 3x' + 2x = g' - g, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0;$$

а) найдем импульсную переходную функцию $K_0(t)$ для уравнения $x'' - 3x' + 2x = f(t)$, решая уравнение (5.38):

$$K_0'' - 3K_0' + 2K_0 = \delta(t), \quad K_0(0) = 0, \quad K_0'(0) = 0.$$

Решим его с применением операционного исчисления:

- перейдем от оригиналов к изображениям:

$$L[K_0(t)] = K_0(p), \quad L[K_0'(t)] = pK_0(p), \quad L[K_0''(t)] = p^2 K_0(p), \quad L[\delta(t)] = 1;$$

- запишем уравнение для изображений и решим его:

$$p^2 K_0(p) - 3pK_0(p) + 2K_0(p) = 1, \quad K_0(p) = \frac{1}{p^2 - 3p + 2} = \frac{1}{(p-1)(p-2)};$$

- найдем оригинал $K_0(t) = L^{-1}[K_0(p)] = e^{2t} - e^t$;

б) по формуле (5.39) определим импульсную переходную функцию

$$K(t) = 2e^{2t} - e^t - e^{2t} + e^t = e^{2t};$$

в) по формуле (5.40) имеем

$$x_{сум}(t) = \int_0^t e^{2\tau} e^{3(t-\tau)} d\tau = e^{3t} \int_0^t e^{-\tau} d\tau = -e^{3t} e^{-\tau} \Big|_0^t = e^{3t} - e^{2t}.$$

3. Решение задачи получается по формуле (5.41):

$$x(t) = x_{св}(t) + x_{сум}(t) = e^{3t} - e^{2t}.$$

Пример 5.46. Найти решение задачи:

$$x''' + 6x'' + 11x' + 6x = g'' + 5g' + 6g, \quad g(t) = I(t), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -3, \quad x''(0) = 9.$$

Решение. Решим задачу, следуя алгоритму.

1. Найдем свободное движение $x_{св}(t)$ как решение уравнения (5.36):

$$x''' + 6x'' + 11x' + 6x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -3, \quad x''(0) = 9.$$

Согласно результату примера 5.33, п. "б": $x_{св}(t) = e^{-3t}$.

2. Найдем вынужденное движение как решение уравнения (5.37):

$$x''' + 6x'' + 11x' + 6x = g'' + 5g' + 6g, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad x''(0) = 0;$$

а) найдем импульсную переходную функцию для уравнения

$$x''' + 6x'' + 11x' + 6x = f(t),$$

то есть решим уравнение (5.38):

$$K_0''' + 6K_0'' + 11K_0' + 6K_0 = \delta(t), \quad K_0(0) = 0, \quad K_0'(0) = 0, \quad K_0''(0) = 0.$$

Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$L[K_0(t)] = K_0(p); \quad L[K_0'(t)] = pK_0(p);$$

$$L[K_0''(t)] = p^2 K_0(p); \quad L[K_0'''(t)] = p^3 K_0(p); \quad L[\delta(t)] = 1.$$

Запишем уравнение для изображений и решим его:

$$p^3 K_0(p) + 6p^2 K_0(p) + 11pK_0(p) + 6K_0(p) = 1, \\ K_0(p) = \frac{1}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6} = \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)} = \frac{1}{2} \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+3}.$$

Найдем оригинал: $K_0(t) = \frac{1}{2} e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-3t}$;

б) найдем импульсную переходную функцию $K(t)$ по формуле (5.39):

$$K(t) = K_0''(t) + 5K_0'(t) + 6K_0(t) = \frac{1}{2} e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{9}{2} e^{-3t} - \\ - \frac{5}{2} e^{-t} + 10e^{-2t} - \frac{15}{2} e^{-3t} + 3e^{-t} - 6e^{-2t} + 3e^{-3t} = e^{-t};$$

в) определим вынужденное движение по формуле (5.40):

$$x_{\text{вын}}(t) = \int_0^t e^{-\tau} I(t-\tau) d\tau = -e^{-\tau} \Big|_0^t = 1 - e^{-t}.$$

3. Найдем решение задачи по формуле (5.41): $x(t) = e^{-3t} + 1 - e^{-t}$. Заметим, что результат совпадает с полученным в примере 3.26.

5.2.2. Применение передаточных функций для анализа выходных процессов

Рассмотрим особенности применения преобразования Лапласа для решения задач анализа непрерывных одномерных и многомерных стационарных динамических систем (см. разд.1.2, разд.3.1.2.4 и разд.4.2.4). Отличие сформулированных в разд.1.2 задач анализа выходных процессов от задач, рассмотренных в данном разделе, будет состоять в предположении о стационарности рассматриваемых систем. Это условие означает (так же как в разд.3.1.2.4 и разд.4.2.4), что коэффициенты линейных дифференциальных уравнений и систем будут предполагаться постоянными, то есть не зависящими от времени.

1. Одномерные системы. Сформулированная в разд.1.2 задача анализа выходных процессов для одномерных линейных систем применительно к стационарным системам формулируется как задача нахождения выходного сигнала

$x(t)$ линейной стационарной системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = \\ = b_m g^{(m)}(t) + b_{m-1} g^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 g'(t) + b_0 g(t), \end{aligned} \quad (5.42)$$

при начальных условиях

$$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}$$

и заданном входном сигнале $g(t)$, $t > 0$, принадлежащем пространству оригиналов. В (5.42) предполагается, что $a_n, \dots, a_0, b_m, \dots, b_0$ - коэффициенты, не зависящие от времени.

Алгоритм решения задачи анализа выходных процессов для одномерных линейных стационарных систем с помощью преобразования Лапласа

1. Найти изображение входного сигнала:

$$G(p) = L[g(t)] = \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt,$$

где $g(t)$ - сигнал, $G(p)$ - его изображение по Лапласу.

2. Найти передаточную функцию системы

$$W(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}, \quad (5.43)$$

и, если начальные условия ненулевые, функции

$$\begin{aligned} D(p) &= a_n p^n + \dots + a_0; \\ D_x(p) &= x_0 (a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1) + x'_0 (a_n p^{n-2} + \dots + a_3 p + a_2) + \dots \\ &\dots + x_0^{(n-2)} (a_n p + a_{n-1}) + x_0^{(n-1)} a_n = \\ &= p^{n-1} a_n x_0 + p^{n-2} (a_n x'_0 + a_{n-1} x_0) + \dots + (a_n x_0^{(n-1)} + a_{n-1} x_0^{(n-2)} + \dots + a_2 x'_0 + a_1 x_0). \end{aligned} \quad (5.44)$$

3. Определить изображение по Лапласу выходного сигнала по формуле

$$X(p) = \frac{D_x(p)}{D(p)} + W(p)G(p). \quad (5.45)$$

4. Найти выходной сигнал, используя обратное преобразование Лапласа

$$x(t) = L^{-1}[X(p)].$$

З а м е ч а н и е 5.8.

1. Функция $D(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0$ называется характеристическим многочленом, а передаточная функция определяется следующими двумя способами.

Первый способ. *Передающей функцией* $W(p)$ стационарной линейной системы называется преобразование Лапласа импульсной переходной функции $K(t)$, соответствующей уравнению (5.42): $W(p) = L[K(t)]$. Передаточная функция является функцией комплексного переменного p . Функция $K(t)$ находится по формуле (5.39).

Второй способ. *Передающей функцией* $W(p)$ называется отношение преобразования Лапласа выходного сигнала к преобразованию Лапласа входного сигнала при нулевых начальных условиях:

$$W(p) = \frac{X(p)}{G(p)}.$$

2. Первое слагаемое в (5.45) представляет собой изображение по Лапласу свободного движения (под действием ненулевых начальных условий и нулевым входным сигналом), а второе - вынужденного (под действием входного сигнала при нулевых начальных условиях).

3. Применяя свойства (5.11) и (5.19) преобразования Лапласа, можно получить установившиеся значения выходного сигнала и его производных по изображению $X(p)$:

$$\begin{aligned} x_y &= \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pX(p), \\ x_y^{(k)} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} x^{(k)}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p^{k+1} \left[X(p) - \frac{x_y}{p} - \frac{x_y'}{p^2} - \dots - \frac{x_y^{(k-1)}}{p^k} \right], \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.46)$$

Пример 5.47. Найти реакцию динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением $x' = 4g(t)$, на входной сигнал $g(t) = \sin 3t$ при нулевых начальных условиях.

Решение. 1. Найдем изображение входного сигнала: $G(p) = \frac{3}{p^2 + 9}$.

2. Получим передаточную функцию: $W(p) = \frac{4}{p}$. Функция $D_M(p) = 0$, так как начальные условия нулевые.

3. Определим изображение по Лапласу выходного сигнала:

$$X(p) = W(p)G(p) = \frac{4}{p} \frac{3}{p^2 + 9} = \frac{4}{3p} - \frac{4p}{3(p^2 + 9)}.$$

4. Найдем выходной сигнал: $x(t) = L^{-1}[X(p)] = \frac{4}{3}(1 - \cos 3t)$.

В теории автоматического регулирования и управления рассмотренная система называется *интегрирующим звеном*.

Пример 5.48. Найти реакцию динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением $x'(t) + x(t) = g(t)$ с начальным условием $x(0) = \frac{1}{2}$, на входной сигнал $g(t) = I(t)$.

Решение. 1. Найдем изображение входного сигнала: $G(p) = \frac{1}{p}$.

2. Получим передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{1}{p+1}, \quad D(p) = p+1, \quad D_n(p) = x_0 a_1 = \frac{1}{2},$$

так как $n=1, a_1=1$.

3. Определим изображение по Лапласу выходного сигнала:

$$X(p) = \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{p(p+1)}.$$

$\parallel$
 $X_{св}(p)$

$\parallel$
 $X_{емн}(p)$

4. Найдем выходной сигнал:

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{-t} + 1 - e^{-t} = 1 - \frac{1}{2} e^{-t}.$$

$\parallel$
 $x_{св}(t)$

$\parallel$
 $x_{емн}(t)$

Заметим, что полученное решение совпадает с найденным в примере 5.29. В теории автоматического регулирования и управления рассмотренная система называется *апериодическим звеном*.

Пример 5.49. Найти реакцию динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением $x'' - 3x' + 2x = g(t)$ с начальными условиями $x(0) = 1, x'(0) = 3$, на входной сигнал $g(t) = 2e^{3t} I(t)$.

Решение. 1. Найдем изображение входного сигнала: $G(p) = \frac{2}{p-3}$.

2. При $n=2, a_2=1, a_1=-3, a_0=2$ из (5.43), (5.44) получим передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{1}{p^2 - 3p + 2}, \quad D(p) = p^2 - 3p + 2,$$

$$D_n(p) = x_0(a_1 + a_2 p) + x'_0 a_2 = 1(-3 + p) + 3 \cdot 1 = p.$$

3. Определим изображение по Лапласу выходного сигнала:

$$X(p) = \frac{p}{p^2 - 3p + 2} + \frac{2}{(p^2 - 3p + 2)(p-3)} = \frac{p}{(p-1)(p-2)} + \frac{2}{(p-1)(p-2)(p-3)} =$$

$$= -\frac{1}{p-1} + \frac{2}{p-2} + \frac{1}{p-1} - \frac{2}{p-2} + \frac{1}{p-3}.$$

$\parallel$
 $X_{св}(p)$

$\parallel$
 $X_{емн}(p)$

4. Найдем выходной сигнал:

$$x(t) = \underbrace{-e^t + 2e^{2t}}_{x_{св}} + \underbrace{e^t - 2e^{2t} + e^{3t}}_{x_{вын}} = e^{3t}.$$

Пример 5.50. Найти реакцию динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением $x'' - 3x' + 2x = g'(t) - g(t)$ с начальными условиями $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$, на входной сигнал $g(t) = e^{3t} I(t)$.

Решение. 1. Найдем изображение входного сигнала: $G(p) = \frac{1}{p-3}$.

2. Получим передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{p-1}{p^2-3p+2}, \quad D(p) = p^2 - 3p + 2,$$

$$D_0(p) = x_0(a_1 + a_2 p) + x'_0 a_2 = 1(-3 + p) + 3 \cdot 1 = p.$$

3. Определим изображение по Лапласу выходного сигнала:

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{p}{p^2-3p+2} + \frac{p-1}{(p^2-3p+2)(p-3)} = \frac{p}{(p-1)(p-2)} + \frac{p-1}{(p-1)(p-2)(p-3)} = \\ &= \underbrace{-\frac{1}{p-1} + \frac{2}{p-2}}_{X_{св}(p)} + \underbrace{\frac{1}{p-3} - \frac{1}{p-2}}_{X_{вын}(p)}. \end{aligned}$$

4. Найдем выходной сигнал:

$$x(t) = \underbrace{2e^{2t} - e^t}_{x_{св}} + \underbrace{e^{3t} - e^{2t}}_{x_{вын}} = e^{3t} + e^{2t} - e^t.$$

Заметим, что результат для вынужденного движения совпадает с полученным в примере 5.45.

Пример 5.51. Найти реакцию динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением $x''' + 6x'' + 11x' + 6x = g''(t) + 5g'(t) + 6g(t)$ с начальными условиями $x(0) = 1$, $x'(0) = -3$, $x''(0) = 9$, на входной сигнал $g(t) = I(t)$. Определить установившиеся значения выходного сигнала и его производных.

Решение. 1. Найдем изображение входного сигнала: $G(p) = \frac{1}{p}$.

2. Получим передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{p^2 + 5p + 6}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}, \quad D(p) = p^3 + 6p^2 + 11p + 6 = (p+1)(p+2)(p+3),$$

$$\begin{aligned} D_0(p) &= x_0(a_1 + a_2 p + a_3 p^2) + x'_0(a_2 + a_3 p) + x''_0 a_3 = \\ &= x_0(11 + 6p + p^2) + x'_0(6 + p) + x''_0 = p^2 + 3p + 2 = (p+1)(p+2). \end{aligned}$$

3. Определим изображение по Лапласу выходного сигнала:

$$X(p) = \frac{(p+1)(p+2)}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \frac{(p+2)(p+3)}{(p+1)(p+2)(p+3)} \frac{1}{p} = \frac{1}{p+3} + \frac{1}{p(p+1)}.$$

По формулам (5.46) найдем установившиеся значения выходного сигнала и его производных. Поскольку $X(p) = \frac{1}{p+3} + \frac{1}{p(p+1)} = \frac{p^2+2p+3}{p(p+1)(p+3)}$, то

$$x_y = \lim_{p \rightarrow 0} p X(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^2+2p+3}{p(p+1)(p+3)} = 1;$$

$$x_y' = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 \left[X(p) - \frac{x_y}{p} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 \left[\frac{p^2+2p+3}{p(p+1)(p+3)} - \frac{1}{p} \right] = 0;$$

$$x_y'' = \lim_{p \rightarrow 0} p^3 \left[X(p) - \frac{x_y}{p} - \frac{x_y'}{p^2} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} p^3 \left[\frac{p^2+2p+3}{p(p+1)(p+3)} - \frac{1}{p} \right] = 0.$$

4. Найдем выходной сигнал: $x(t) = e^{-3t} + 1 - e^{-t}$.

Заметим, что результат совпадает с полученным в примере 5.46.

2. Многомерные системы. Сформулированная в разд.1.2 задача анализа выходных процессов для многомерных линейных систем применительно к стационарным системам формулируется как задача нахождения вектора состояния $X(t)$ и выходного сигнала $Y(t)$ линейной стационарной системы, описываемой уравнением состояния

$$X' = AX + BQ(t) \quad (5.47)$$

и уравнением выхода

$$Y(t) = CX(t), \quad (5.48)$$

при начальных условиях

$$X(0) = X_0, \quad (5.49)$$

где $X_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})^T$, и заданном входном сигнале $G(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_k(t) \end{pmatrix}$, $t > 0$, каждая

компонента которого принадлежит пространству оригиналов. В (5.47), (5.48) предполагается, что $X = (x_1, \dots, x_n)^T$, $Y = (y_1, \dots, y_k)^T$; A, B, C - постоянные матрицы соответствующих размерностей.

**Алгоритм решения задачи анализа выходных процессов для
многомерных линейных стационарных систем с помощью
преобразования Лапласа**

1. Найти изображение входного сигнала:

$$G(p) = L[G(t)] = \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt,$$

где $G(t)$ - r -мерный входной сигнал, $G(p)$ - r -мерный вектор его изображений по Лапласу.

2. Найти матрицы $[pE - A]^{-1}$, $C[pE - A]^{-1}$ и передаточные функции по формулам:

$$W^x(p) = [pE - A]^{-1}B, \quad W^y(p) = C[pE - A]^{-1}B,$$

где E - единичная матрица.

3. Определить изображение по Лапласу законов изменения векторов состояния и выхода:

$$\begin{aligned} X(p) &= [pE - A]^{-1}X_0 + W^x(p)G(p), \\ Y(p) &= C[pE - A]^{-1}X_0 + W^y(p)G(p). \end{aligned} \quad (5.50)$$

4. Найти законы изменения векторов состояния и выхода с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$X(t) = L^{-1}[X(p)], \quad Y(t) = L^{-1}[Y(p)].$$

З а м е ч а н и е 5.9.

1. Первые слагаемые в (5.50) представляют собой изображения по Лапласу свободного движения (под действием ненулевых начальных условий и при нулевом входном сигнале), а вторые - вынужденного (под действием входного сигнала при нулевых начальных условиях).

2. Передаточная функция $W^x(p)$ по состоянию и передаточная функция $W^y(p)$ по выходу представляются матрицами размера $(n \times r)$, $(k \times r)$ соответственно, элементы которых являются функциями комплексного переменного p . Они определяются как преобразования Лапласа соответствующих импульсных переходных функций [33].

Пример 5.52. Найти законы изменения векторов состояния и выхода многомерной системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 + g, & y &= x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 \end{aligned}$$

с начальными условиями $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$, при входном сигнале $g(t) = e^t I(t)$.

Решение. Перепишем уравнения системы в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_B \delta(t), \quad y = \underbrace{(1 \ 1)}_C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

1. Найдем изображение входного сигнала: $G(p) = \frac{1}{p-1}$.

2. Получим передаточные функции:

$$[pE - A] = \begin{pmatrix} p-1 & -2 \\ -2 & p-1 \end{pmatrix}, \quad \det [pE - A] = \begin{vmatrix} p-1 & -2 \\ -2 & p-1 \end{vmatrix} = p^2 - 2p - 3 = (p-3)(p+1),$$

$$[pE - A]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{p-1}{(p-3)(p+1)} & \frac{2}{(p-3)(p+1)} \\ \frac{2}{(p-3)(p+1)} & \frac{p-1}{(p-3)(p+1)} \end{pmatrix},$$

$$C [pE - A]^{-1} = (1 \ 1) [pE - A]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p-3} & \frac{1}{p-3} \end{pmatrix},$$

$$W^x(p) = [pE - A]^{-1} B = [pE - A]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p-1}{(p-3)(p+1)} \\ \frac{2}{(p-3)(p+1)} \end{pmatrix},$$

$$W^y(p) = C [pE - A]^{-1} B = (1 \ 1) [pE - A]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{p-3}.$$

3. По формулам (5.50) определим изображения законов изменения векторов состояния и выхода:

$$\begin{aligned} X(p) &= \begin{pmatrix} \frac{p-1}{(p-3)(p+1)} & \frac{2}{(p-3)(p+1)} \\ \frac{2}{(p-3)(p+1)} & \frac{p-1}{(p-3)(p+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{p-1}{(p-3)(p+1)} \\ \frac{2}{(p-3)(p+1)} \end{pmatrix} \frac{1}{p-1} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{p+1} \\ \frac{1}{p+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{(p-3)(p+1)} \\ \frac{2}{(p-3)(p+1)(p-1)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{p+1} \\ -\frac{1}{p+1} \end{pmatrix}}_{X_{\text{св}}(p)} + \frac{1}{4} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{p-3} - \frac{1}{p+1} \\ \frac{1}{p-3} - \frac{2}{p-1} + \frac{1}{p+1} \end{pmatrix}}_{X_{\text{свн}}(p)}, \end{aligned}$$

$$Y(p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{p-3} & \frac{1}{p-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{p-3} \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p-3} \frac{1}{p-1} = \frac{1}{2(p-3)} - \frac{1}{2(p-1)}.$$

4. Искомые законы изменения векторов состояния и выхода:

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} - 2e^t + e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25e^{3t} + 0,75e^{-t} \\ 0,25e^{3t} - 0,5e^t - 0,75e^{-t} \end{pmatrix},$$

$\parallel$ $\parallel$
 $x_{\text{св}}(t)$ $x_{\text{вын}}(t)$

$$y(t) = L^{-1}[Y(p)] = 0,5e^{3t} - 0,5e^t.$$

Заметим, что результат совпадает с полученным в примере 4.46.

Пример 5.53. Найти законы изменения векторов состояния и выхода многомерной системы:

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2 + g_1(t), & y_1 &= x_2, \\ x_2' &= x_1 + g_2(t), & y_2 &= x_1 + 0,5x_2 \end{aligned}$$

с начальными условиями $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 0$, при входном сигнале $g_1(t) = 2I(t)$, $g_2(t) = I(t)$.

Решение. 1. Перепишем уравнение системы в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}, \quad y = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Определим изображение входного сигнала: $G(p) = \begin{pmatrix} 2/p \\ 1/p \end{pmatrix}$.

2. Получим передаточные функции:

$$\begin{aligned} [pE - A] &= \begin{pmatrix} p & 1 \\ -1 & p \end{pmatrix}, \quad [pE - A]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{p}{p^2 + 1} & \frac{-1}{p^2 + 1} \\ \frac{1}{p^2 + 1} & \frac{p}{p^2 + 1} \end{pmatrix}, \\ C[pE - A]^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p}{p^2 + 1} & \frac{-1}{p^2 + 1} \\ \frac{1}{p^2 + 1} & \frac{p}{p^2 + 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2 + 1} & \frac{p}{p^2 + 1} \\ \frac{p + 0,5}{p^2 + 1} & \frac{0,5p - 1}{p^2 + 1} \end{pmatrix}, \\ W^x(p) &= [pE - A]^{-1}B = [pE - A]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{p^2 + 1} & \frac{-1}{p^2 + 1} \\ \frac{1}{p^2 + 1} & \frac{p}{p^2 + 1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$W^y(p) = C[pE - A]^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix} [pE - A]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2+1} & \frac{p}{p^2+1} \\ \frac{p+0,5}{p^2+1} & \frac{0,5p-1}{p^2+1} \end{pmatrix}.$$

3. По формулам (5.50) найдем изображения законов изменения векторов состояния и выхода:

$$\begin{aligned} X(p) &= \begin{pmatrix} \frac{p}{p^2+1} & \frac{-1}{p^2+1} \\ \frac{1}{p^2+1} & \frac{p}{p^2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{p}{p^2+1} & \frac{-1}{p^2+1} \\ \frac{1}{p^2+1} & \frac{p}{p^2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/p \\ 1/p \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-p}{p^2+1} \\ \frac{-1}{p^2+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2p-1}{p(p^2+1)} \\ \frac{2+p}{p(p^2+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-p^2+2p-1}{p(p^2+1)} \\ \frac{2}{p(p^2+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{p} + \frac{2}{p^2+1} \\ \frac{2}{p} - \frac{2p}{p^2+1} \end{pmatrix}, \\ &\quad \parallel \quad \parallel \\ &\quad X_{co}(p) \quad X_{enn}(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(p) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2+1} & \frac{p}{p^2+1} \\ \frac{p+0,5}{p^2+1} & \frac{0,5p-1}{p^2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2+1} & \frac{p}{p^2+1} \\ \frac{p+0,5}{p^2+1} & \frac{0,5p-1}{p^2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/p \\ 1/p \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{p(p^2+1)} \\ \frac{2-p}{p^2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{p} - \frac{2p}{p^2+1} \\ \frac{2}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Искомые законы изменения векторов состояния и выхода:

$$x(t) = L^{-1}[X(p)] = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 + 2 \sin t + \cos t \\ 2 + \sin t - 2 \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2 \sin t \\ 2 - 2 \cos t \end{pmatrix},$$

$\parallel$ $\parallel$
 $x_{co}(t)$ $x_{enn}(t)$

$$y(t) = L^{-1}[Y(p)] = \begin{pmatrix} 2 - 2 \cos t \\ 2 \sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

Найденный закон изменения вектора состояния совпадает с полученным в примерах 4.47 и 5.37.

5.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти изображения по оригиналам:

а) $f(t) = \cos^3 t$. Ответ: $F(p) = \frac{p(p^2 + 7)}{(p^2 + 1)(p^2 + 9)}$;

б) $f(t) = \operatorname{sh} 2t \sin 3t$. Ответ: $F(p) = \frac{12p}{[(p-2)^2 + 9][(p+2)^2 + 9]}$;

в) $f(t) = t \operatorname{ch} 2t$. Ответ: $F(p) = \frac{p^2 + 4}{(p^2 - 4)^2}$;

г) $f(t) = t \operatorname{sh} 3t$. Ответ: $F(p) = \frac{6p}{(p^2 - 9)^2}$;

д) $f(t) = \operatorname{sh} 2t \cos 3t$. Ответ: $F(p) = \frac{2(p^2 - 13)}{p[(p-2)^2 + 9][(p+2)^2 + 9]}$;

е) $f(t) = \frac{1 - \cos t}{t} e^{-t}$. Ответ: $F(p) = \ln \frac{\sqrt{p^2 + 2p + 2}}{p + 1}$.

2. Найти оригиналы по изображениям:

а) $F(p) = \frac{p}{p^2 - 2p + 5}$. Ответ: $f(t) = e^t [\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t]$;

б) $F(p) = \frac{1}{p^3 - 8}$. Ответ: $f(t) = \frac{1}{12} e^{2t} - \frac{1}{12} e^{-t} (\cos \sqrt{3} t + \sqrt{3} \sin \sqrt{3} t)$;

в) $F(p) = \frac{p}{(p-1)^3 (p+2)^2}$. Ответ: $f(t) = \frac{3t^2 + 2t - 2}{54} e^t + \frac{2t + 1}{27} e^{-2t}$;

г) $F(p) = \frac{p + 1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$. Ответ: $f(t) = -\frac{1}{6} + e^t - \frac{3}{2} e^{2t} + \frac{2}{3} e^{3t}$;

д) $F(p) = \frac{p}{p^4 - 1}$. Ответ: $f(t) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} t - \cos t)$;

е) $F(p) = \frac{1}{(p-1)^3}$. Ответ: $f(t) = \frac{t^2 e^t}{2}$;

ж) $F(p) = \frac{p}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}$. Ответ: $f(t) = -\frac{1}{6} e^{-t} + e^{-2t} - \frac{3}{2} e^{-3t} + \frac{2}{3} e^{-4t}$;

з) $F(p) = \frac{4 - p - p^2}{p^3 - p^2}$. Ответ: $f(t) = 2e^t - 4t - 3$;

и) $F(p) = \frac{e^{-3p} + e^{-p}}{p + 2}$. Ответ: $f(t) = e^{-2(t-3)} I(t-3) + e^{-2(t-1)} I(t-1)$;

к) $F(p) = \frac{p-3}{p^2 + 2p + 5}$. Ответ: $f(t) = e^{-t} (\cos 2t - 2 \sin 2t)$;

$$л) F(p) = \frac{2p^2 - 1}{p^2(p+1)(p+2)}. \text{ Ответ: } f(t) = \frac{3}{4} - \frac{t}{2} + e^{-t} - \frac{7}{4}e^{-2t};$$

$$м) F(p) = \frac{2p^2 - p - 1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}. \text{ Ответ: } f(t) = 2e^{-t} - 2\sqrt{3}e^{-t/2} \sin \sqrt{3}/2 t;$$

$$н) F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}. \text{ Ответ: } f(t) = \frac{1}{3} \cos t - \frac{1}{3} \cos 2t.$$

3. Решить задачи Коши:

а) $x' = x + t - 1$, $x(0) = 0$. Ответ: $x(t) = -t$;

б) $x'' + x = t \cos 2t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

Ответ: $x(t) = -\frac{5}{9} \sin t + \frac{5}{18} \sin 2t + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \sin 2t - t \cos 2t \right)$;

в) $x' = -3x + 3t - 2$, $x(0) = 0$. Ответ: $x(t) = e^{-3t} + t - 1$;

г) $x'' + 9x = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$. Ответ: $x(t) = \frac{1}{9} (1 - \cos 3t)$;

д) $x'' + 4x = \sin 3t$, $x(0) = x'(0) = 0$. Ответ: $x(t) = \frac{3}{10} \sin 2t - \frac{1}{5} \sin 3t$;

е) $x''' - x'' = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 1$. Ответ: $x(t) = 1 - t + e^t$;

ж) $x'' - 3x' + 2x = e^{5t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$. Ответ: $x(t) = \frac{1}{12} e^{5t} + \frac{1}{4} e^t + \frac{2}{3} e^{2t}$;

з) $3x' + 2x + y' = 1$, $x(0) = 0$,

$x' + 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 0$.

Ответ: $x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} e^{-t} - \frac{3}{10} e^{-6t/11}$, $y(t) = \frac{1}{5} (e^{-t} - e^{-6t/11})$;

и) $x' = 2y$, $x(0) = 2$,

$y' = 2x$, $y(0) = 2$.

Ответ: $x(t) = y(t) = 2 e^{2t}$;

к) $x' = 3x + 4y$, $x(0) = 1$,

$y' = 4x - 3y$, $y(0) = 1$.

Ответ: $x(t) = \frac{6}{5} e^{5t} - \frac{1}{5} e^{-5t}$, $y(t) = \frac{3}{5} e^{5t} + \frac{2}{5} e^{-5t}$.

4. Решить задачи анализа выходных процессов:

а) $x' = 4x + g(t)$, $g(t) = 2 - t$, $x(0) = 1$. Ответ: $x(t) = \frac{23}{16} e^{4t} + \frac{t}{4} - \frac{7}{16}$;

б) $x' = -x + g(t)$, $g(t) = 5t + 2$, $x(0) = 0$. Ответ: $x(t) = 3e^{-t} + 5t - 3$;

в) $x'' - x' = g(t)$, $g(t) = t^2$, $x(0) = x'(0) = 0$.

Ответ: $x(t) = 2e^t - \frac{1}{3} t^3 - t^2 - 2t - 2$;

г) $x''' + x = g(t)$, $g(t) = I(t)$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

Ответ: $x(t) = 1 - \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{2}{3} e^{t/2} \cos t \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Анализ поведения динамических систем на фазовой плоскости

6.1. Динамические системы и их исследование в фазовом пространстве

Рассматривая дифференциальные уравнения и системы в практических задачах, подразумевают, что конкретное уравнение описывает конкретное физическое явление. Естественно, при составлении модельного уравнения допускаются определенные упрощающие предположения, что в конечном итоге приводит к неадекватности математической модели и изучаемого физического явления. Предполагая, что внесенные в модельное уравнение незначительные погрешности малы, можно ставить задачу анализа устойчивости решений дифференциальных уравнений, тем самым выясняя, насколько сильно могут влиять на решения внесенные в уравнение погрешности. Однако часто оказывается недостаточно простого утверждения об устойчивости или неустойчивости решения дифференциального уравнения, а требуется более тонкое изучение поведения системы с течением времени. При этом не требуется (или оказывается просто невозможным) отыскивать общее решение уравнения. Часть теории дифференциальных уравнений, посвященную этой проблеме, принято называть *качественной теорией дифференциальных уравнений*. Одним из основных методов качественной теории является *метод фазовой плоскости*.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в нормальной форме:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (6.1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ - вектор переменных; $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$ - вектор правых частей; t - переменная времени.

Будем считать решения системы (6.1) траекториями движения некоторой динамической системы, изменяющей состояние с течением времени.

Система (6.1) называется *автономной*, так как вектор правых частей не зависит от времени. Таким образом, уравнение (6.1) является математической моделью автономной динамической системы (АДС).

Учитывая представленную физическую интерпретацию, вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ будем называть *вектором фазовых переменных*, пространство R^n фазовых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ - *фазовым пространством*, решение системы (6.1) в фазовом пространстве с заданным на нем параметром t - *фазовой траекторией* (рис. 6.1, а при $n = 2$), а схематическое изображение семейства фазовых траекторий - *фазовым портретом*.

Система уравнений, описывающая семейство фазовых траекторий АДС (6.1), получается следующим образом. Представим (6.1) в координатной форме:

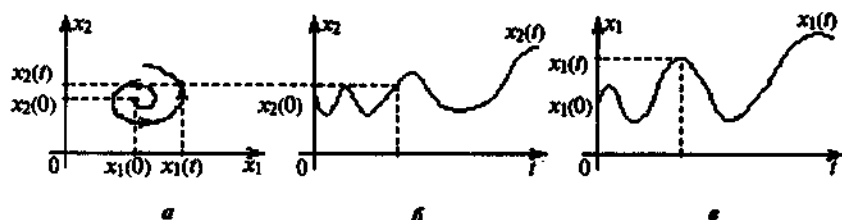


Рис.6.1

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} dt = \frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \\ dt = \frac{dx_2}{f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \\ \dots \\ dt = \frac{dx_n}{f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \end{array} \right.$$

Исключая из последних n уравнений dt , получаем систему $(n-1)$ уравнений:

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \quad (6.2)$$

Система уравнений (6.2) описывает семейство фазовых траекторий АДС (6.1). Поскольку общее решение (6.2) зависит от $(n-1)$ произвольной постоянной, заключаем, что семейство фазовых траекторий АДС (6.1) является параметрическим семейством кривых в пространстве R^n , которое зависит от $(n-1)$ параметра.

Предполагая, что для системы (6.1) выполнены условия теоремы 1.2, можно сделать вывод, что эти условия выполнены также и для системы (6.2), за исключением точек, в которых все функции $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, обращаются в нуль. Эти точки являются *особыми точками* системы (6.2).

Пусть x_0 - особая точка. Тогда $f(x_0) = 0$, и в силу (6.1) $\frac{dx}{dt} = 0$. Следовательно, единственным решением системы (6.1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ является функция $x(t) = x_0$. Таким образом, особые точки системы (6.2) являются *точками покоя* АДС (6.1). Справедливо и обратное утверждение, так как в точке покоя x_0 выполнено $\frac{dx}{dt} = f(x_0) = 0$, а значит, она является особой точкой системы (6.2). Не ограничивая общности, можно считать, что исследуемая точка покоя находится в начале координат, то есть $x_0 = 0$, в

противном случае можно перейти к новым переменным $y = x - x_0$. Изучение поведения семейства фазовых траекторий в фазовом пространстве является методом решения задачи анализа устойчивости (см. разд.1.2) динамической системы.

Среди фазовых траекторий динамической системы, кроме точек покоя, выделяют еще замыкающиеся траектории, соответствующие периодическим решениям системы (6.1). Такие траектории называют *циклами*. Циклы характеризуются тем, что решение системы (6.1), пройдя через любую точку цикла в фазовом пространстве, будет возвращаться в нее через определенные промежутки времени бесконечное число раз.

6.2. Анализ поведения динамических систем второго порядка на фазовой плоскости

В случае систем второго порядка фазовое пространство R^n превращается в фазовую плоскость R^2 . Фазовые переменные в этом случае удобнее переобозначить: $x_1 = x$, $x_2 = y$.

Рассмотрим автономную динамическую систему второго порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f_1(x, y), \\ \frac{dy(t)}{dt} = f_2(x, y). \end{cases} \quad (6.3)$$

Точки покоя системы (6.3) задаются системой уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Семейство фазовых траекторий системы (6.3) является однопараметрическим (см. рис.6.1) и описывается согласно (6.2) уравнением

$$\frac{dx}{f_1(x, y)} = \frac{dy}{f_2(x, y)} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)}.$$

Особую роль для практической деятельности играют *линейные автономные динамические системы*. Линейная АДС второго порядка описывается линейной однородной системой с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = a_{11} x(t) + a_{12} y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = a_{21} x(t) + a_{22} y(t), \end{cases} \quad (6.4)$$

или в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Поделив второе уравнение в (6.4) на первое, получаем уравнение семейства фазовых траекторий:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}. \quad (6.5)$$

Предполагая, что определитель матрицы системы (6.4) отличен от нуля ($\det A \neq 0$), заключаем, что решением системы

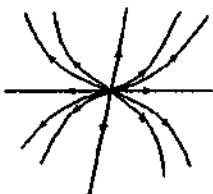
$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad (6.6)$$

и единственной точкой покоя системы (6.4) является точка $x=0$, $y=0$, то есть тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$. Если же $\det A = 0$, то точками покоя, кроме тривиального решения, могут оказаться другие, так как система (6.6) в этом случае имеет бесконечное множество решений.

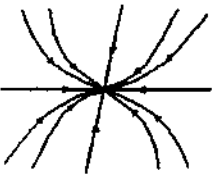
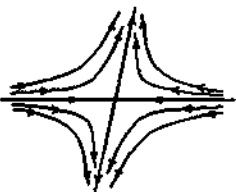
6.2.1. Классификация точек покоя линейных автономных динамических систем второго порядка

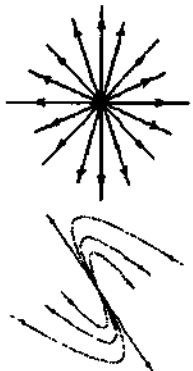
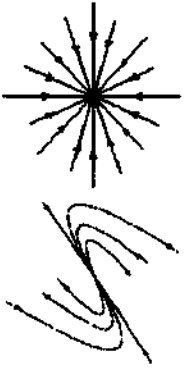
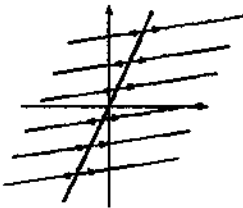
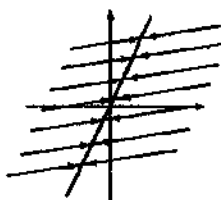
Различные типы точек покоя порождаются различными случаями корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ матрицы A . Полная классификация всех возможных случаев приведена в табл.6.1. Отметим, что согласно утверждению 4.1 (см. разд.4.1.2) собственные значения однозначно определяют характер устойчивости однородной системы (6.4).

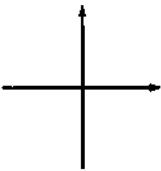
Таблица 6.1

Корни характеристического уравнения	Точка покоя	Фазовый портрет	Устойчивость (неустойчивость) тривиального решения
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$	Неустойчивый узел		Неустойчиво

Продолжение табл. 6.1

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$	Устойчивый узел		Асимптотически устойчиво
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$	Седло		Неустойчиво
$\lambda_{1,2} = \pm j\beta$	Центр		Устойчиво по Ляпунову
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ $\alpha > 0$	Неустойчивый фокус		Неустойчиво
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ $\alpha < 0$	Устойчивый фокус		Асимптотически устойчиво

$\lambda_1 = \lambda_2$ $\lambda_1 > 0$	Неустойчи- вый узел или дикрити- ческий узел		Неустойчиво
$\lambda_1 = \lambda_2$ $\lambda_1 < 0$	Устойчивый узел или дикрити- ческий узел		Асимптотически устойчиво
$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 > 0$	Прямая		Неустойчиво
$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 < 0$	Прямая		Устойчиво по Ляпунову

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	Вся фазовая плоскость		Устойчиво по Ляпунову

6.2.2. Алгоритм построения фазового портрета и анализа устойчивости линейных автономных динамических систем второго порядка

Окончательный вывод об устойчивости (неустойчивости) линейной АДС второго порядка и типа точки покоя удобно сделать при помощи табл.6.1, а для построения фазового портрета необходимо использовать следующий алгоритм.

Алгоритм построения фазового портрета

1. Выписать характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ и найти его решения - собственные значения λ_1, λ_2 .

2. По табл.6.1 определить тип точки покоя и сделать вывод об устойчивости тривиального решения.

3. Начертить фазовый портрет:

а) если точка покоя является узлом или седлом, то следует найти собственные векторы $p = (p_1, p_2)^T$ и $q = (q_1, q_2)^T$ матрицы A (в случае $\lambda_1 = \lambda_2$ найти только вектор $p = (p_1, p_2)^T$) и начертить определяемые этими векторами прямые на фазовой плоскости. Далее вычерчивается фазовый портрет. При этом учитывается, что в случае узла фазовые траектории касаются той прямой, которая отвечает меньшему по модулю собственному значению [29];

б) если точка покоя является центром или фокусом, то семейство фазовых траекторий можно получить, применив метод изоклин (см. разд.1.2, п.3) к уравнению (6.5) или, если это удобнее, решив его аналитически;

в) если множество точек покоя - прямая, то необходимо выписать уравнение этой прямой, которое является решением одного из уравнений:

$$a_{21}x + a_{22}y = 0 \text{ или } a_{11}x + a_{12}y = 0.$$

Уравнение (6.5) семейства фазовых траекторий, которые являются прямыми, в данном случае легко решается аналитически. По полученным уравнениям множество точек покоя и фазовые траектории вычерчиваются на фазовой плоскости;

г) в оставшихся случаях (дискритический узел и фазовая плоскость) фазовый портрет вычерчивается непосредственно.

4. Определить направление движения по фазовым траекториям и изобразить его стрелками на фазовом портрете.

З а м е ч а н и е 6.1. Пункт 4 алгоритма для всех типов точек покоя, за исключением седла и центра, выполняется непосредственно, так как направление движения однозначно определяется устойчивостью (к началу координат) или неустойчивостью (от начала координат) тривиального решения. В случае седла вначале надо показать направления движения по прямой, определяемым собственными векторами, учитывая, что движение по прямой, соответствующей отрицательному собственному значению, происходит к началу координат, а по прямой, соответствующей положительному собственному значению, - от начала координат. По всем остальным фазовым траекториям движение происходит в сторону начала координат по ветвям, касающимся прямой, соответствующей отрицательному собственному значению, и от начала координат по ветвям, касающимся прямой, соответствующей положительному собственному значению. В случае центра необходимо выписать какое-либо частное решение системы, проанализировать, как изменяются переменные x и y в зависимости от t и определить, как происходит движение - по часовой стрелке или против.

Пример 6.1. Построить фазовый портрет и исследовать на устойчивость АДС:

$$\begin{cases} x' = -4x + 2y, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$$

Решение. 1. Выписываем характеристическое уравнение: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 5\lambda = 0$ и находим собственные значения матрицы A : $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -5$.

2. Согласно табл.6.1, имеем множество точек покоя, образующих прямую. Тривиальное решение устойчиво по Ляпунову.

3. Поступим согласно п.3"в" алгоритма. Поскольку $\det A = 0$, система (6.6) имеет бесконечное множество решений. Множество точек покоя находим из второго уравнения: $2x - y = 0$ или $y = 2x$. Уравнение семейства фазовых траекторий:

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{-4x + 2y} = -\frac{1}{2}$. Таким образом, фазовые траектории являются прямыми, описываемыми уравнением $y = -\frac{1}{2}x + C$.

4. Поскольку все точки покоя являются устойчивыми по Ляпунову решениями (но не асимптотически устойчивыми), движение по фазовым траекто-

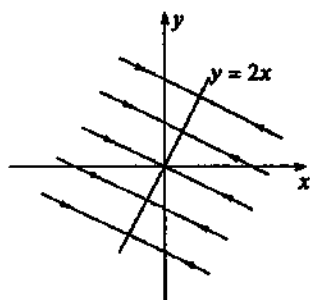


Рис.6.2

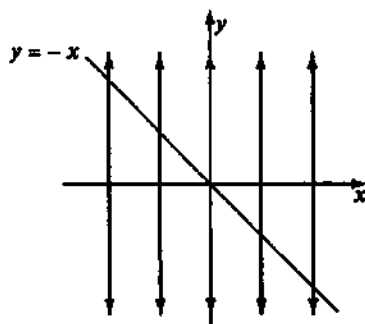


Рис.6.3

ниям происходит из бесконечности к прямой $y = 2x$. Фазовый портрет приведен на рис.6.2.

Пример 6.2. Построить фазовый портрет и исследовать на устойчивость АДС:

$$\begin{cases} x' = 0, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

Решение. 1. Выписываем характеристическое уравнение: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - \lambda = 0$ и находим собственные значения матрицы A : $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1$.

2. Согласно табл.6.1, имеем множество точек покоя, образующих прямую. Тривиальное решение неустойчиво.

3. Поступим согласно п.3"в" алгоритма. Поскольку $\det A = 0$, система (6.6) имеет бесконечное множество решений. Из второго уравнения системы находим множество точек покоя, а именно $x + y = 0$. Уравнение семейства фазовых траекторий: $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{x+y} = 0$. Таким образом, фазовые траектории являются прямыми $x = C$.

4. Поскольку все точки покоя являются неустойчивыми решениями, движение по фазовым траекториям происходит от прямой $x + y = 0$ в бесконечность. Фазовый портрет приведен на рис.6.3.

Пример 6.3. Построить фазовый портрет и исследовать на устойчивость АДС:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

Решение. 1. Выписываем характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ и находим собственные значения матрицы A : $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$.

2. Согласно табл.6.1 точка покоя является неустойчивым узлом. Тривиальное решение неустойчиво.

3. Поступим согласно п.3"а" алгоритма. Составляем систему уравнений $(A - \lambda_1 E)p = 0$ для $p = (p_1, p_2)^T$ и получаем $p_1 = -p_2$. В качестве собственного вектора выбираем $p = (1, -1)^T$. Составляем систему уравнений $(A - \lambda_2 E)q = 0$ для $q = (q_1, q_2)^T$ и получаем $q_1 = 0$. В качестве собственного вектора выбираем $q = (0, 1)^T$. Фазовые траектории задаются уравнением $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x}$. Записав это уравнение в виде $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y + 1$, замечаем, что оно является линейным неоднородным уравнением первого порядка (см. разд.2.4.1).

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y$ имеет вид $y(x) = Cx^2$ (это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными). Решение неоднородного уравнения ищем методом вариации произвольной постоянной (см. разд.2.4.1), то есть в виде $y(x) = Q(x)x^2$. Подставляя последнее выражение в уравнение, находим:

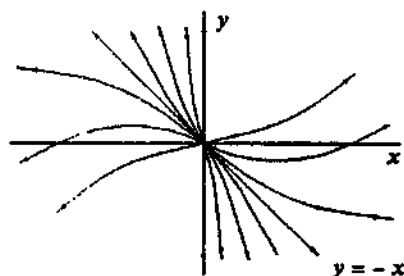


Рис.6.4

$$C(x) = -\frac{1}{x} + C,$$

откуда $y(x) = Cx^2 - x$ - уравнение семейства фазовых траекторий.

4. Поскольку точка покоя является неустойчивым решением, движение по фазовым траекториям происходит от начала координат в бесконечность. Фазовый портрет приведен на рис.6.4. Отметим, что фазовые траектории касаются прямой: $-x - y = 0$, определяемой собственным вектором p , так как $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Уравнение этой прямой получено исходя из того, что каноническое уравнение

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

прямой, проходящей через точку $x_0 = y_0 = 0$, имеет вид $b x - a y = 0$, где $(a, b)^T$ - направляющий вектор прямой. В данном случае этот вектор совпадает с вектором $p = (1, -1)^T$.

Пример 6.4. Построить фазовый портрет и исследовать на устойчивость АДС:

$$\begin{cases} x' = -3x + 2y, \\ y' = x - 4y. \end{cases}$$

Решение. 1. Выписываем характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$ и находим собственные значения матрицы A : $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = -5$.

2. Согласно табл.6.1 точка покоя является устойчивым узлом. Тривиальное решение асимптотически устойчиво.

3. Поступим согласно п.3"а" алгоритма. Составляем систему уравнений $(A - \lambda_1 E)p = 0$ для $p = (p_1, p_2)^T$ и получаем $p_1 = 2p_2$. В качестве собственного вектора выбираем $p = (2, 1)^T$. Составляем систему уравнений $(A - \lambda_2 E)q = 0$ для $q = (q_1, q_2)^T$ и получаем $q_1 = -q_2$. В качестве собственного вектора выбираем $q = (1, -1)^T$. Фазовые траектории задаются уравнением $\frac{dy}{dx} = \frac{x - 4y}{-3x + 2y}$. Для построения семейства фазовых траекторий воспользуемся методом изоклин (см. разд.1.2, п.3). Уравнения изоклин имеют вид $\frac{x - 4y}{-3x + 2y} = k = \text{const}$

или $y = \frac{1 + 3k}{2k + 2}x$, то есть изоклины являются прямыми линиями, каждая из которых получается при конкретных значениях параметра k . При $k = 0$: $y = \frac{1}{2}x$, при $k = 1$: $y = x$, при $k = 10$: $y = \frac{13}{12}x$, при $k = -\frac{1}{2}$: $y = -\frac{1}{2}x$ и так далее. Строим теперь поле направлений, нанося на изоклины единичные

векторы, образующие с осью абсцисс угол α : $\operatorname{tg} \alpha = k$. Проводя кривые, касательные к которым совпадают с указателями поля направлений, получаем фазовый портрет.

4. Поскольку точка покоя является асимптотически устойчивым решением, движение по фазовым траекториям происходит из бесконечности к началу координат. Фазовый портрет приведен на рис.6.5. Отметим, что фазовые кривые касаются прямой $x - 2y = 0$, определяемой собственным вектором $p = (2, 1)^T$, поскольку $|\lambda_1| < |\lambda_2|$.

Пример 6.5. Построить фазовый портрет и исследовать на устойчивость АДС:

$$\begin{cases} x' = 2y, \\ y' = 2x + 3y. \end{cases}$$

Решение. 1. Выписываем характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ и находим собственные значения матрицы A : $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 4$.

2. Согласно табл.6.1 точка покоя является седлом. Тривиальное решение неустойчиво.

3. Поступим согласно п.3"а" алгоритма. Составляем систему уравнений $(A - \lambda_1 E)p = 0$ для $p = (p_1, p_2)^T$ и получаем $2p_2 = -p_1$. В качестве собственного вектора выбираем $p = (-2, 1)^T$. Составляем систему уравнений $(A - \lambda_2 E)q = 0$ для $q = (q_1, q_2)^T$ и получаем $2q_1 = q_2$. В качестве собственного вектора выбираем $q = (1, 2)^T$. Фазовые траектории задаются уравнением $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3y}{2y}$. Для построения семейства фазовых траекторий воспользуемся методом изоклин (см. разд.1.2).

Уравнения изоклин имеют вид $\frac{2x + 3y}{2y} = k = \operatorname{const}$ или $y = \frac{2}{2k - 3}x$, то есть изоклины являются прямыми линиями, каждая из которых получается при конкретных значениях параметра k . При $k = 0$: $y = -\frac{2}{3}x$, при $k = 1$: $y = -2x$, при $k = 2$: $y = 2x$, при $k = 3$: $y = \frac{2}{3}x$, при $k = \frac{1}{2}$: $y = -x$ и так далее. Строим

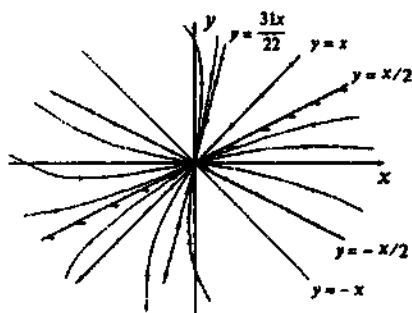


Рис.6.5

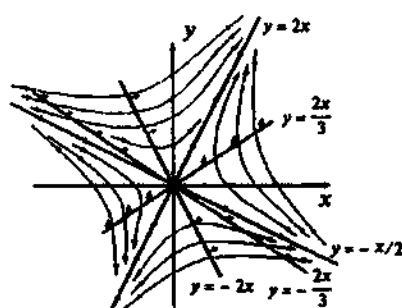


Рис.6.6

теперь поле направлений, нанося на изоклины единичные векторы, образующие с осью абсцисс угол α : $\operatorname{tg} \alpha = k$. Проводя кривые, касательные к которым совпадают с указателями поля направлений, получаем фазовый портрет.

4. Движение по прямой $y = -x/2$ ($x + 2y = 0$) происходит к началу координат, так как вектор $p = (-2, 1)^T$ отвечает собственному значению $\lambda_1 = -1 < 0$, а по прямой $y = 2x$ ($2x - y = 0$) - от начала координат, так как вектор $q = (1, 2)^T$ отвечает собственному значению $\lambda_2 = 4 > 0$. Фазовый портрет приведен на рис.6.6.

Пример 6.6. Построить фазовый портрет и исследовать на устойчивость АДС:

$$\begin{cases} x' = ax + y, \\ y' = -x + ay. \end{cases}$$

Решение. 1. Выписываем характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1 = 0$ и находим собственные значения матрицы A : $\lambda_{1,2} = a \pm i$.

Предположим вначале, что $a = 0$. Тогда рассматриваемая система примет вид $\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x. \end{cases}$

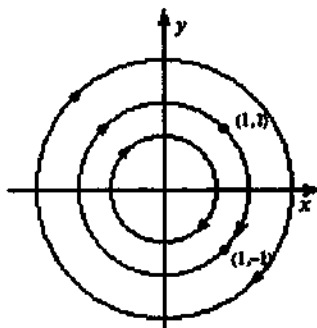


Рис.6.7

2. Согласно табл.6.1 точка покоя является центром.

3. Поступим согласно п.3"б" алгоритма. Фазовые траектории задаются уравнением $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, которое является уравнением с разделяющимися переменными, и его общий интеграл имеет вид $x^2 + y^2 = C$. Таким образом, фазовые траектории представляют собой концентрические окружности с центром в начале координат.

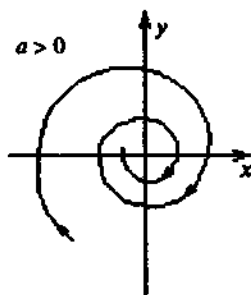


Рис.6.8

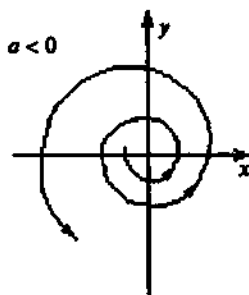


Рис.6.9

4. Для определения направления движения по фазовым траекториям (по часовой стрелке или против) рассмотрим частное решение системы (при $a = 0$):

$$\begin{cases} x(t) = \cos t + \sin t, \\ y(t) = -\sin t + \cos t. \end{cases}$$

При $t = 0$ получаем $x = 1, y = 1$. При $t = \pi/2$ получаем $x = 1, y = -1$. Таким образом, дви-

жение по фазовым траекториям происходит по часовой стрелке. Фазовый портрет приведен на рис.6.7. Точка покоя является устойчивым по Ляпунову решением, но не асимптотически устойчивым.

При $a > 0$ центр превращается в устойчивый фокус. Фазовые траектории являются спиралями, движение по которым происходит к началу координат. При $a < 0$ центр превращается в неустойчивый фокус. Фазовые траектории являются спиралями, движение по которым происходит от начала координат. Фазовые портреты приведены соответственно на рис.6.8 и 6.9.

Пример 6.7. Рассмотрим автономную динамическую систему с неизвестными параметрами, описываемую следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = -Dy, \\ y' = x - 2Cy. \end{cases}$$

Неизвестные параметры C и D могут выбираться из некоторого множества допустимых значений, причем так, чтобы выполнялись условия $D \neq 0$, $C \neq 0$, $C^2 \neq D$. Для анализа поведения системы при различных значениях параметров C , D требуется исследовать поведение системы методом фазовой плоскости.

Решение. Характеристическое уравнение системы $\lambda^2 + 2C\lambda + D = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = -C \pm \sqrt{C^2 - D}$. Рассмотрим следующие возможные ситуации.

Случай 1. При $C^2 - D < 0$ собственные значения $\lambda_{1,2}$ - комплексные сопряженные числа, а значит, точка покоя рассматриваемой системы является фокусом. Если $C > 0$, то тривиальное решение асимптотически устойчиво, если $C < 0$, то неустойчиво.

Случай 2. При $C^2 - D > 0$, $D > 0$ собственные значения $\lambda_{1,2}$ - различные действительные числа одного знака, а значит, точка покоя рассматриваемой системы является узлом. Если $C > 0$, то тривиальное решение асимптотически устойчиво, если $C < 0$, то неустойчиво.

Случай 3. При $C^2 - D > 0$, $D < 0$ собственные значения $\lambda_{1,2}$ - действительные числа разных знаков, а значит, точка покоя рассматриваемой системы является седлом и тривиальное решение неустойчиво.

На рис.6.10 все возможные ситуации, характеризующие соотношениями параметров C и D , представлены в системе координат, в которой по оси абсцисс изменяется параметр C , а по оси ординат - параметр D . Накладывая теперь на рис.6.10 заданную область возможных значений параметров C , D , можно делать вывод о характере устойчивости системы при тех или иных значениях параметров.

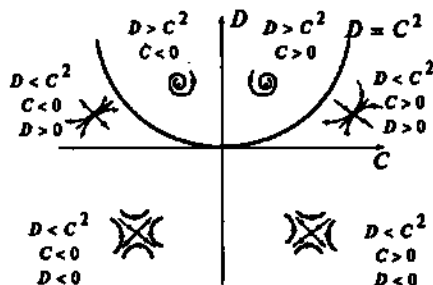


Рис.6.10

6.2.3. Нелинейные автономные динамические системы второго порядка

Наряду с линейными автономными системами, рассмотренными в разд. 6.2, на практике широко распространены *нелинейные АДС* второго порядка, описываемые в общем случае системой обыкновенных дифференциальных уравнений (6.3):

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f_1(x, y), \\ \frac{dy(t)}{dt} = f_2(x, y). \end{cases}$$

Семейство соответствующих этой системе фазовых траекторий определяется уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)}. \quad (6.7)$$

Важным частным случаем нелинейных АДС второго порядка являются системы, описываемые обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$x''(t) = f(x(t), x'(t)). \quad (6.8)$$

Для получения уравнения, описывающего семейство фазовых траекторий, введем дополнительную неизвестную функцию $y(t) = x'(t)$ и перепишем (6.8) в виде

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = f(x(t), y(t)) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = f(x, y). \end{cases} \quad (6.9)$$

Таким образом, уравнение (6.7) в данном случае принимает форму

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}. \quad (6.10)$$

Итак, для построения фазового портрета нелинейной АДС второго порядка требуется составить и решить дифференциальное уравнение (6.7) или (6.10) первого порядка. Для решения полученного уравнения можно использовать методы, рассмотренные в разд. 2, а если уравнение не интегрируется в квадратурах - приближенные методы (например, метод изоклин).

Примером нелинейных АДС являются системы с одним нелинейным элементом (рис. 6.11). В схеме, изображенной на рис. 6.11, использованы следующие обозначения: g - входной сигнал; x - выходной сигнал; ε - разность между входным и выходным сигналами (ошибка); *нелинейный элемент*, задаваемый функцией $z = F(\varepsilon)$, которая значению ε входа ставит в соответствие значение выхода z ; линейная АДС второго порядка, описываемая уравнени-



Рис.6.11

$$x'' + a_1 x' + a_0 x = b_0 z,$$

где a_1, a_0, b_0 - известные коэффициенты.

На практике встречаются нелинейные элементы, в которых значение выхода определяется не только величиной z , но и скоростью ее изменения z' . Такие элементы определяются функцией $z = F(e, e')$. Наличие нелинейного элемента придает динамической системе свойства, присущие только нелинейным системам.

Получим уравнение, описывающее свободное движение (входной сигнал отсутствует, то есть $g(t) = 0$) в системе, изображенной на рис.6.11:

$$\begin{cases} x'' + a_1 x' + a_0 x = b_0 z, \\ z = F(e), \\ e = g - x, \\ g(t) = 0. \end{cases}$$

В результате имеем $x'' = -a_1 x' - a_0 x + b_0 F(-x)$. Обозначая правую часть полученного уравнения через $f(x, x') = -a_1 x' - a_0 x + b_0 F(-x)$, приходим к уравнению (6.8). Таким образом, характеристика нелинейного элемента принимает участие в формировании правой части уравнения. Если нелинейный элемент задается функцией $z = F(e, e')$, в правую часть входит функция $F(-x, -x')$. В случае, если характеристика нелинейного элемента является нечетной функцией, правая часть уравнения имеет вид

$$f(x, x') = -a_1 x' - a_0 x - b_0 F(x) \quad \text{или} \quad \dot{f}(x, x') = -a_1 x' - a_0 x - b_0 F(x, x').$$

По поведению свободного движения можно судить об устойчивости нелинейной АДС.

Широкое применение на практике получили нелинейные элементы с негладкими характеристиками, типовые примеры которых приведены на рис.6.12-6.16. Для рассматриваемых негладких элементов обычно отмечают наличие следующих характерных зон:

зоны нечувствительности (промежутки значений аргумента x , при которых выходное значение преобразования $z = F(x, x')$ равно нулю);

участок насыщения (промежутки (конечные или бесконечные) значений аргумента x , на которых выходное значение преобразования $z = F(x, x')$ постоянно);

зоны неоднозначности (промежутки значений аргумента x , на которых выходное значение преобразования $z = F(x, x')$ может принимать различные

значения в зависимости от некоторых параметров или от знака скорости $x'(t)$;

участков линейности (промежутки значений аргумента x , на которых функция $F(x, x')$ линейна по x).

Релейный элемент

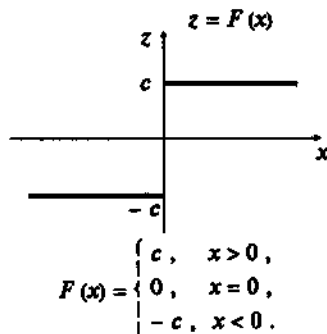


Рис.6.12

Релейный элемент с зоной нечувствительности

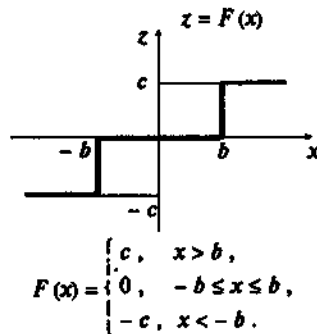


Рис.6.13

Элемент с зонами линейности и нечувствительности

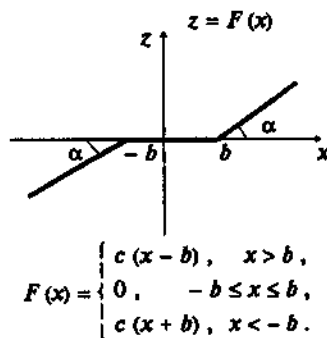


Рис.6.14

Элемент с петлей гистерезиса

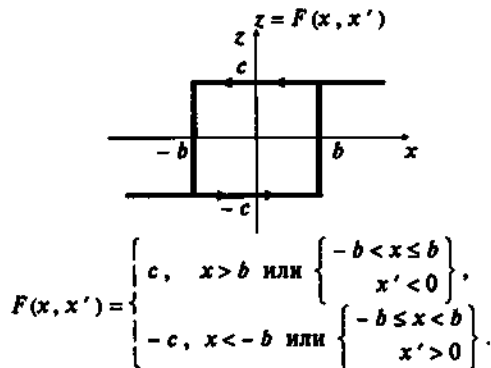


Рис.6.15

Элемент с петлей гистерезиса имеет зону неоднозначности, то есть значение выхода зависит при $x(t) \in [-b, b]$ от знака скорости $x'(t)$.

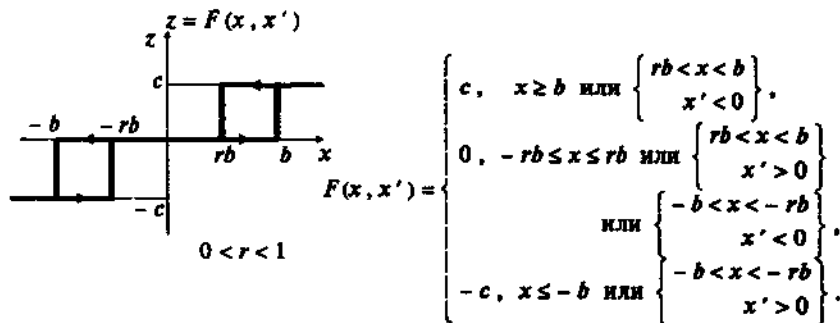


Рис.6.16

Фазовые портреты нелинейных АДС второго порядка по сравнению с линейными могут оказаться значительно разнообразнее. Так, для систем, содержащих нелинейный элемент с зоной нечувствительности, на фазовом портрете возникает *особый отрезок* (рис.6.17), состоящий из особых точек. Если все эти точки являются точками устойчивого равновесия, то особый отрезок называется *отрезком покоя* рассматриваемой системы, поскольку в каждой из этих точек скорость ($y = \dot{x} = 0$) равна нулю. Кроме особых точек, следует указать также особые линии фазового портрета: предельные циклы и сепаратрисы.

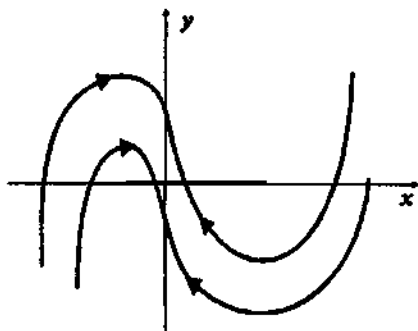


Рис.6.17

Предельным циклом называется замкнутая фазовая кривая, в окрестности которой все фазовые траектории неограниченно приближаются к этой замкнутой кривой при $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow -\infty$. Цикл может быть *устойчивым*, если любая точка на фазовом портрете, находящаяся в окрестности цикла, приближается к нему при $t \rightarrow +\infty$ (рис.6.18, а), *неустойчивым*, если любая точка на фазовом портрете, находящаяся в окрестности цикла, приближается к нему при $t \rightarrow -\infty$ (рис.6.18, б), или *полуустойчивым* (рис.6.18, в).

Сепаратрисой называют фазовую траекторию, стремящуюся (при $t \rightarrow \pm\infty$) к некоторому положению равновесия, в любой окрестности которой имеются траектории, вначале приближающиеся к этому положению равновесия, а затем удаляющиеся от него. Например, сепаратрисами являются четыре луча, пересекающиеся в особой точке типа седло и служащие асимптотами для других фазовых траекторий.

Точки равновесия, предельные циклы и сепаратрисы определяют качественную картину поведения остальных фазовых траекторий.

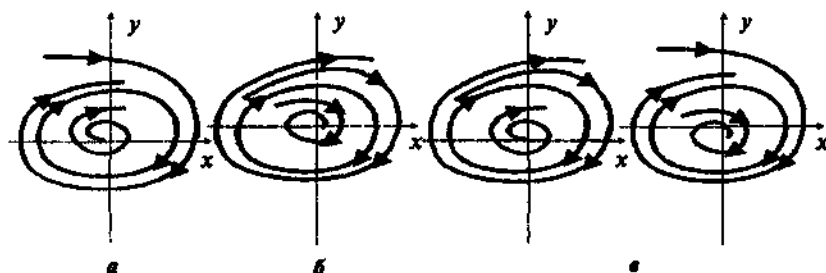


Рис.6.18

Для построения фазового портрета в соответствии с видом характеристики нелинейного элемента следует выделить на фазовой плоскости характерные области, определяемые зонами нечувствительности и неоднозначности нелинейного элемента. В каждой области требуется записать уравнение фазовых траекторий. Затем необходимо построить фазовую траекторию в области, содержащей начальную точку (x_0, x'_0) . Если фазовая траектория, исходящая из точки (x_0, x'_0) , достигает границы, отделяющей начальную область от соседней, то следует найти координаты точки ее пересечения с границей. Эти координаты далее используются в качестве начальных условий для решения уравнения фазовых траекторий, соответствующего соседней области. Таким образом, построение фазовой траектории начинается с области, содержащей начальную точку, и продолжается последовательно с переходами от области к области.

Отметим, что на границе областей фазовая траектория непрерывна, а фазовая скорость $\frac{dy}{dx}$ может терпеть разрыв.

При построении фазовых траекторий следует указывать направления движения по ним. Для динамической системы (6.9) в силу связи $x' = y$ движение происходит в сторону увеличения координаты x при $y > 0$ и в сторону уменьшения x при $y < 0$. Заметим, что касательная к фазовой траектории при пересечении оси абсцисс перпендикулярна этой оси.

Пример 6.8. Построить фазовую траекторию динамической системы, описываемой уравнением $x'' = -F(x, x')$, с начальными условиями $x(0) = 4$, $x'(0) = 0$, где функция $z = F(x, x')$ соответствует релейному элементу с зонами нечувствительности и неоднозначности (см. рис.6.16) и параметрами $b = 2$, $c = 1$, $r = \frac{1}{2}$.

Решение. Разобьем фазовую плоскость на три области А, Б, В (рис.6.19), в каждой из которых функция $z = F(x, x')$ принимает одно значение:

- в области А, где $x \leq -b = -2$ или $\begin{cases} -2 < x < -1 \\ x' = y > 0 \end{cases}$, $F(x, x') = -1$;

- в области Б, где $-1 \leq x \leq 1$ или $\begin{cases} 1 < x < 2 \\ x' = y > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} -2 < x < -1 \\ x' = y < 0 \end{cases}$, $F(x, x') = 0$;

для области A имеет вид $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$, $y(-2) = -\sqrt{6}$. Решив ее, построим в области A параболу $x = \frac{y^2}{2} - 5$, которая перейдет в область B в точке $(-1, 2\sqrt{2})$. Далее проводим через область B прямую $y = 2\sqrt{2}$, решаем задачу Коши для области B с начальным условием $y(2) = 2\sqrt{2}$, проводим параболу $x = 6 - \frac{y^2}{2}$ и так далее (рис.6.19).

Пример 6.9. Построить фазовый портрет динамической системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \frac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

Решение. Нелинейная АДС в данном случае записана в виде (6.3), поэтому можно сразу выписать уравнение (6.7) фазовых траекторий, разделив второе уравнение системы на первое. Однако, для того чтобы получить аналитическое выражение для семейства фазовых траекторий, удобнее сначала перейти к полярным координатам:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Отсюда $x^2 + y^2 = r^2$, $\theta = \arctg \frac{y}{x}$. Про дифференцируем последние два равенства по t :

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2r \frac{dr}{dt}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{\frac{dy}{dt}x - \frac{dx}{dt}y}{x^2}$$

или

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = r \frac{dr}{dt}, \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r^2 \frac{d\theta}{dt}. \quad (6.11)$$

Теперь вернемся к решаемой системе: умножим первое уравнение этой системы на x , а второе на y и сложим полученные уравнения:

$$\begin{aligned} x \frac{dx}{dt} &= -xy + x^2(1 - x^2 - y^2), \\ y \frac{dy}{dt} &= xy + y^2(1 - x^2 - y^2), \\ x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} &= (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2). \end{aligned}$$

С учетом первого уравнения системы (6.11) получаем

$$r \frac{dr}{dt} = r^2(1-r^2) \quad \text{или} \quad \frac{dr}{dt} = r(1-r^2). \quad (6.12)$$

Далее умножим второе уравнение исходной системы на x , а первое на y и вычтем из второго уравнения первое:

$$\begin{aligned} x \frac{dy}{dt} &= x^2 + xy(1-x^2-y^2), \\ y \frac{dx}{dt} &= -y^2 + xy(1-x^2-y^2), \\ x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= (x^2 + y^2). \end{aligned}$$

С учетом второго уравнения системы (6.11) получаем

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = r^2 \quad \text{или} \quad \frac{d\theta}{dt} = 1. \quad (6.13)$$

Интегрируем уравнение (6.12):

$$\begin{aligned} \frac{dr}{r(1-r^2)} &= dt; \quad \frac{dr}{r} + \frac{1}{2} \frac{dr}{1-r} - \frac{1}{2} \frac{dr}{1+r} = dt; \\ \ln|r| - \frac{1}{2} \ln|1-r| - \frac{1}{2} \ln|1+r| + \ln C &= t; \quad \ln \frac{Cr}{\sqrt{1-r^2}} = t; \quad \frac{Cr}{\sqrt{1-r^2}} = e^t; \\ \frac{C^2 r^2}{1-r^2} &= e^{2t}; \quad C^2 r^2 = e^{2t} - r^2 e^{2t}; \quad r^2 = \frac{e^{2t}}{C^2 + e^{2t}} = \frac{1}{C_1 e^{-2t} + 1}, \quad C_1 = C^2. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + C_1 e^{-2t}}}. \quad (6.14)$$

Решая уравнение (6.13), находим $\theta(t) = t + C_2$. Таким образом, получаем общее решение поставленной задачи:

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos \theta(t) = \frac{\cos(t + C_2)}{\sqrt{1 + C_1 e^{-2t}}}, \\ y(t) &= r(t) \sin \theta(t) = \frac{\sin(t + C_2)}{\sqrt{1 + C_1 e^{-2t}}}. \end{aligned}$$

Полагая в (6.14) $C_1 = 0$, получаем

$$r(t) = 1, \quad \theta(t) = t + C_2.$$

Эти равенства определяют замкнутую траекторию - окруж-

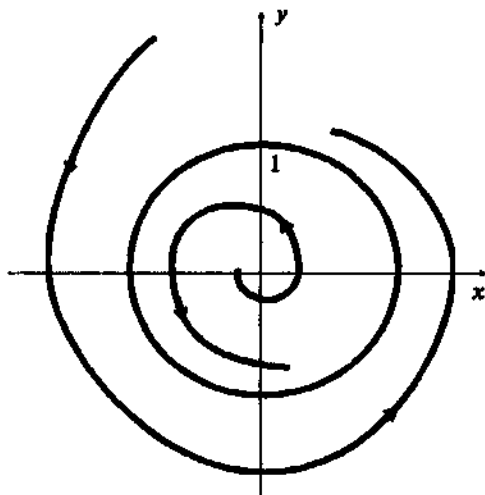


Рис.6.20

ность $x^2 + y^2 = 1$. Если $C_1 < 0$, то, очевидно, $r > 1$ и $r \rightarrow 1$ при $t \rightarrow +\infty$. Если $C_1 > 0$, то $r < 1$ и $r \rightarrow 1$ при $t \rightarrow +\infty$. Это означает, что существует единственная замкнутая траектория $r = 1$, к которой с течением времени приближаются все остальные траектории (рис.6.20). Таким образом, окружность $x^2 + y^2 = 1$ является устойчивым предельным циклом системы.

Заметим, что в данном примере уравнение предельного цикла удалось найти явно. В общем случае этого сделать нельзя, поэтому обычно для построения фазового портрета используются приближенные методы, например, метод изоклин.

Пример 6.10. Построить фазовый портрет динамической системы, описываемой уравнением $x'' = -x - F(x, x')$, где функция $z = F(x, x')$ соответствует элементу с петлей гистерезиса (см. рис.6.15) и параметрами $b = 2$, $c = 1$.

Решение. Запишем уравнение (6.10), описывающее семейство фазовых траекторий, учитывая, что $f(x, y) = -x - F(x, y)$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + F(x, y)}{y}.$$

Разобьем фазовую плоскость на две области A и B , в каждой из которых функция $z = F(x, y)$ принимает одно значение (рис.6.21):

- в области A , где $x < -b = -2$ или $\begin{cases} -2 \leq x < b = 2 \\ x' = y > 0 \end{cases}$, $F(x, y) = -1$;

- в области B , где $x > 2$ или $\begin{cases} -2 < x \leq 2 \\ x' = y < 0 \end{cases}$, $F(x, y) = 1$.

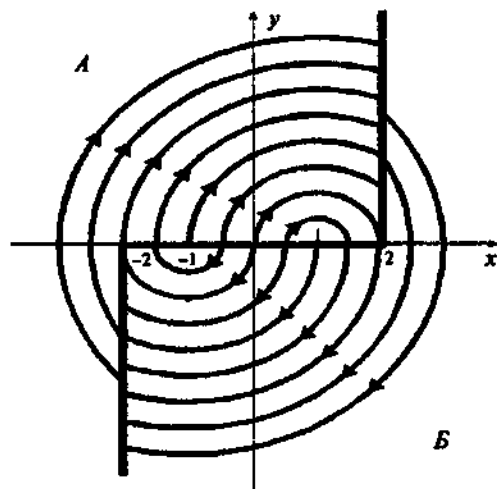


Рис.6.21

Поэтому в области A уравнение фазовых траекторий имеет вид $\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y}$. Отсюда

$$y \, dy = (1-x) \, dx;$$

$$\frac{1}{2} y^2 = x - \frac{1}{2} x^2 + C_1;$$

$$y^2 + x^2 - 2x = 2C_1;$$

$$y^2 + (x-1)^2 = C, \quad C = 2C_1 + 1.$$

Это уравнение окружности с центром в точке $(1, 0)$.

В области B уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+x}{y}.$$

Таким образом, получаем

$$y \, dy = -(1+x) \, dx; \quad \frac{1}{2} y^2 = -x - \frac{1}{2} x^2 + C_1; \quad y^2 + x^2 + 2x = 2C_1;$$

$$y^2 + (x+1)^2 = C, \quad C = 2C_1 + 1.$$

Это уравнение окружности с центром в точке $(-1, 0)$.

Очевидно, что с течением времени все фазовые траектории расходятся от начала координат. Фазовый портрет системы приведен на рис. 6.21.

Пример 6.11. Построить фазовый портрет динамической системы, описываемой уравнением $x'' = -x' - F(x)$, где функция $z = F(x)$ соответствует релейному элементу с зоной нечувствительности (см. рис. 6.13) и параметрами $b=1$, $c=1$.

Решение. Запишем уравнение (6.10), описывающее семейство фазовых траекторий, учитывая, что $f(x, y) = -y - F(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = -1 - \frac{F(x)}{y}.$$

Для построения фазового портрета воспользуемся методом изоклин (см. разд. 1.2). Уравнение изоклин имеет вид

$$-1 - \frac{F(x)}{y} = C \text{ или } y = -\frac{F(x)}{C+1}.$$

Разобьем фазовую плоскость на три области A , B , B , в каждой из которых функция $z = F(x)$ принимает одно значение (см. рис. 6.13):

- в области A , где $x < -b = -1$, $F(x) = -1$;
- в области B , где $-1 \leq x \leq 1$, $F(x) = 0$;
- в области B , где $x > 1$, $F(x) = 1$.

Запишем уравнение изоклин для каждой области:

- для области A : $y = \frac{1}{C+1}$;
- для области B : $C = -1$;
- для области B : $y = -\frac{1}{C+1}$.

В области B уравнение изоклин имеет вид $C = -1$, что свидетельствует о том, что все фазовые траектории в этой области являются прямыми линиями с тангенсом угла наклона $\frac{dy}{dx} = -1$. В области A строим семейство изоклин $y = \frac{1}{C+1}$, выбирая значения параметра C так, чтобы изоклины равномерно заполняли эту область:

$$\begin{array}{llll} C = -3, & y = -0,5; & C = -2, & y = -1; \\ C = -1,5, & y = -2; & C = -0,5, & y = 2; \\ C = 0, & y = 1; & C = 1, & y = 0,5. \end{array}$$

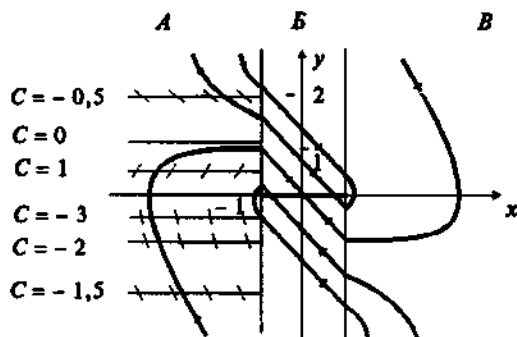


Рис.6.22

Наносим на изоклины поле направлений и изображаем приближенно фазовые траектории в области A , указывая на них направление движения. Через область B фазовые траектории продолжают путем проведения прямых линий, проходящих под углом $-\pi/4$ к оси Ox . В области B картина фазовых траекторий симметрична относительно начала координат картины, построенной в области A .

Итак, движение по всем фазовым траекториям происходит в направлении особого отрезка $y=0$, $-1 \leq x \leq 1$ (рис.6.22), все

точки которого, таким образом, являются точками покоя.

Пример 6.12. Построить фазовый портрет динамической системы

$$x'' = -x' - F(x, x'),$$

где функция $z = F(x, x')$ соответствует элементу с петлей гистерезиса (см. рис.6.15) и параметрами $b=1$, $c=\frac{5\pi}{2}$.

Решение. Запишем уравнение (6.10), описывающее семейство фазовых траекторий, учитывая, что $f(x, y) = -y - F(x, y)$: $\frac{dy}{dx} = -1 - \frac{F(x, y)}{y}$.

Для построения фазового портрета воспользуемся методом изоклин (см. разд.1.2). Уравнение изоклин имеет вид $-1 - \frac{F(x, y)}{y} = C$ или $y = -\frac{F(x, y)}{C+1}$.

Разобьем фазовую плоскость на две области A и B , в каждой из которых функция $z = F(x, y)$ принимает одно значение (рис.6.23):

$$\text{в области } A, \text{ где } x < -1 \text{ или } \begin{cases} -1 \leq x < 1 \\ x' = y > 0 \end{cases}, \quad F(x, y) = -\frac{5\pi}{2};$$

$$\text{в области } B, \text{ где } x > 1 \text{ или } \begin{cases} -1 \leq x < 1 \\ x' = y < 0 \end{cases}, \quad F(x, y) = \frac{5\pi}{2}.$$

Запишем уравнение изоклин для каждой области:

$$\text{для области } A: \quad y = \frac{5\pi}{2(C+1)};$$

$$\text{для области } B: \quad y = -\frac{5\pi}{2(C+1)}.$$

В области B строим семейство изоклин

$$y = -\frac{5\pi}{2(C+1)},$$

выбирая значения параметра C так, чтобы изоклины равномерно заполняли эту область:

$$C = -3, y = \frac{5\pi}{4};$$

$$C = -2, y = \frac{5\pi}{2};$$

$$C = 0, y = -\frac{5\pi}{2};$$

$$C = 1, y = -\frac{5\pi}{4}.$$

Наносим на изоклины поле направлений и изображаем приблизительно фазовые траектории в области B , указывая на них направление движения. В области A картина фазовых траекторий симметрична относительно начала координат картине, построенной в области B .

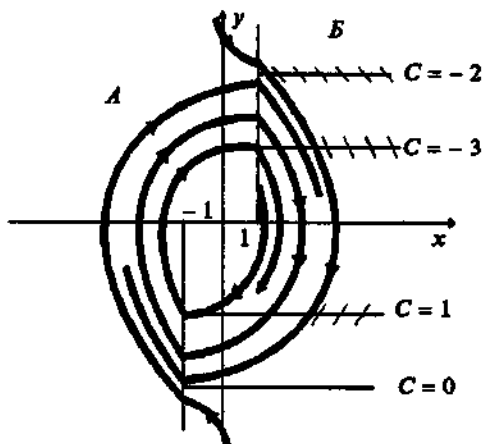


Рис.6.23

Выполненное приближенное построение фазового портрета позволяет обнаружить особую линию - предельный цикл (ему соответствует замкнутая фазовая траектория). Как видно из фазового портрета, в данном примере предельный цикл является устойчивым, поскольку траектории в окрестности цикла с течением времени приближаются к нему.

Пример 6.13. Построить фазовый портрет динамической системы $\dot{x} = -F(x)$, где функция $z = F(x)$ соответствует релейному элементу (см. рис.6.12) с параметром $c = 1$.

Исследовать изменение фазового портрета при замене данного нелинейного элемента релейным элементом с зонами нечувствительности (см. рис.6.13) и параметрами $b=2$, $c=1$, а также элементом с зонами нечувствительности и неоднозначности (см. рис.6.16) и параметрами $b=2$, $c=1$, $r=\frac{1}{2}$.

Решение. Запишем уравнение (6.10), описывающее семейство фазовых траекторий, учитывая, что $f(x, y) = -F(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F(x)}{y}.$$

Разобьем фазовую плоскость на две области A и B , в каждой из которых функция $z = F(x)$ принимает одно значение (см. рис.6.24, а):

- в области A , где $x < 0$, $F(x) = -1$;

- в области B , где $x > 0$, $F(x) = 1$.

Запишем уравнения фазовых траекторий в каждой области:

- в области A : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$;

- в области Б: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y}$.

Оба уравнения являются уравнениями с разделяющимися переменными. Интегрируя их, получаем семейства фазовых траекторий:

- для области А: $x = \frac{1}{2}y^2 + C$;

- для области Б: $x = C - \frac{1}{2}y^2$.

На фазовом портрете получается семейство замкнутых кривых (рис.6.24, а). Если вместо данного нелинейного элемента использовать релейный элемент с зоной нечувствительности (см. рис.6.13), то на фазовом портрете появится новая область (область Б на рис.6.24, б), где $-2 \leq x \leq 2$, $F(x) = 0$. Поскольку в этом случае уравнение фазовых траекторий имеет вид $\frac{dy}{dx} = 0$, то сами траектории описываются уравнением $y = \text{const}$. Траектории в областях А и Б аналогичны построенным на рис.6.24, а в областях А и Б.

Если в качестве нелинейного элемента использовать элемент с зонами нечувствительности и неоднозначности (см. рис.6.16), то фазовый портрет строится так же, как в примере 6.8 (рис.6.24, в). Заметим, что в этом случае изображающая точка с течением времени уходит от начала координат, то есть динамическая система становится неустойчивой.

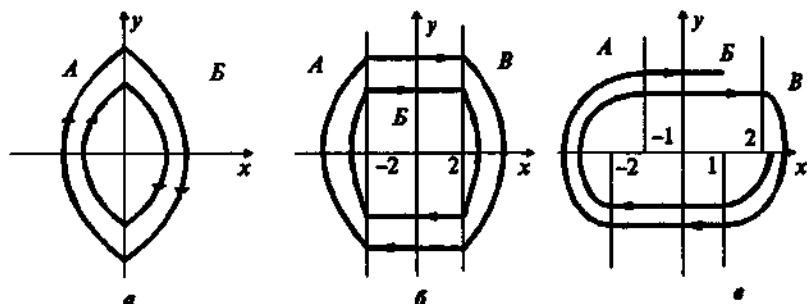


Рис.6.24

Данный пример соответствует задаче управления углом крена космического летательного аппарата под действием реактивных двигателей, создающих управляющий момент. Наличие зоны нечувствительности приводит к большому разбросу значений угла крена (обозначенного здесь через x) относительно невозмущенного движения ($x = 0$, $x' = 0$) по сравнению со случаем применения идеального релейного элемента (рис.6.24, а), а наличие гистерезиса приводит к неустойчивости процесса.

6.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Определить тип точек покоя следующих АДС второго порядка:

$$1) \begin{cases} x' = 3x + 4y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$

Ответ: седло.

$$3) \begin{cases} x' = 3x - 4y, \\ y' = x - 2y. \end{cases}$$

Ответ: седло.

$$5) \begin{cases} x' = x, \\ y' = y. \end{cases}$$

Ответ: неустойчивый дикритический узел.

$$7) \begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = x + 4y. \end{cases}$$

Ответ: неустойчивый узел.

$$2) \begin{cases} x' = y, \\ y' = -2x + y. \end{cases}$$

Ответ: неустойчивый фокус.

$$4) \begin{cases} x' = -3x + 2y, \\ y' = -2x + y. \end{cases}$$

Ответ: устойчивый узел.

$$6) \begin{cases} x' = -3x + 2y, \\ y' = -x - 4y. \end{cases}$$

Ответ: устойчивый фокус.

$$8) \begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$$

Ответ: центр.

2. Построить фазовый портрет и сделать вывод о характере устойчивости точек покоя следующих АДС второго порядка:

$$1) \begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = -6x + 4y. \end{cases}$$

Ответ: особые точки заполняют прямую линию $y = \frac{3}{2}x$, тривиальное решение неустойчиво.

$$2) \begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -x + y. \end{cases}$$

Ответ: особая точка - неустойчивый узел, тривиальное решение неустойчиво.

$$3) \begin{cases} x' = -2x - 5y, \\ y' = 2x + 2y. \end{cases}$$

Ответ: особая точка - центр, тривиальное решение устойчиво по Ляпунову.

$$4) \begin{cases} x' = x, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$$

Ответ: особая точка - седло, тривиальное решение неустойчиво.

$$5) \begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = -6x - 5y. \end{cases}$$

Ответ: особая точка - устойчивый фокус, тривиальное решение асимптотически устойчиво.

$$6) \begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = -2x + 5y. \end{cases}$$

Ответ: особая точка - неустойчивый узел, тривиальное решение неустойчиво.

$$7) \begin{cases} x' = 3x, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$

Ответ: особая точка - неустойчивый узел, тривиальное решение неустойчиво.

7. Приближенно-аналитические методы решения дифференциальных уравнений и систем

7.1. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов

7.1.1. Постановка задачи

Как отмечено в разд.1.2, дифференциальные уравнения даже первого порядка, интегрируемые в квадратурах (в частности, в элементарных функциях), составляют лишь незначительную часть всех обыкновенных дифференциальных уравнений. Для большинства же уравнений найти решение, отвечающее заданным условиям (решить задачу Коши), с помощью конечного числа математических операций невозможно. Приближенно-аналитические методы решения дифференциальных уравнений позволяют находить приближенное решение (с любой точностью) в виде конечного аналитического выражения.

Одним из таких методов является метод, основанный на подборе решения уравнения в виде ряда. Этот метод применяется для решения как линейных, так и нелинейных уравнений и систем в общем случае с переменными коэффициентами.

Идея метода заключается в том, что решение $x(t)$ дифференциального уравнения ищется в виде *степенного ряда* $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^n$, коэффициенты которого находят из тождества, получаемого при подстановке $x(t)$ в заданное уравнение.

Будем рассматривать линейное уравнение (см. (1.5))

$$a_n(t) x^{(n)} + a_{n-1}(t) x^{(n-1)} + \dots + a_1(t) x' + a_0(t) x = f(t). \quad (7.1)$$

Обоснованием применения метода степенных рядов для решения уравнения (7.1) является следующая теорема [44].

ТЕОРЕМА 7.1. Если коэффициенты $a_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, и правая часть $f(t)$ уравнения (7.1) в окрестности точки t_0 разлагаются в степенные ряды, $a_n(t) \neq 0$, то решение $x(t)$ уравнения также разлагается в степенной ряд в некоторой окрестности точки t_0 , то есть может быть записано в виде ряда

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^n = c_0 + c_1(t - t_0) + \dots + c_n(t - t_0)^n + \dots \quad (7.2)$$

З а м е ч а н и е 7.1.

1. Если при выполнении условий теоремы 7.1 заданы начальные условия (1.8), то методом степенных рядов может быть получено решение задачи Коши для уравнения (7.1).

2. Если не заданы начальные условия (1.8) и условия теоремы 7.1 выполняются при $t_0 = 0$, то решение подбирается в виде ряда по степеням t :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n. \quad (7.3)$$

В результате находится общее решение уравнения (7.1).

3. На практике, как правило, сходимость рядов для коэффициентов $a_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, и правой части $f(t)$ не исследуется, а решение дифференциального уравнения записывается в виде ряда (7.2) формально, а после постановки определяются коэффициенты ряда. Полученный таким образом ряд исследуется на сходимость. Область, где он сходится, и определяет ту окрестность, в которой сумма ряда является решением дифференциального уравнения. Такое исследование оказывается возможным в случае, когда удастся получить формулу общего члена ряда.

4. Если формулу для общего члена ряда (7.2) получить не удастся, то решение определяется приближенно как многочлен

$$x(t) = \sum_{k=0}^n c_k (t - t_0)^k \quad (\text{или} \quad x(t)' = \sum_{k=0}^n c_k t^k), \quad (7.4)$$

то есть рассматривается несколько первых членов ряда (его частичная сумма). В этом случае относительно сходимости ряда можно утверждать только, что она имеет место в некоторой окрестности точки t_0 .

5. Для линейного уравнения (7.1), в случае, когда коэффициенты $a_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, и правая часть $f(t)$ уравнения разлагаются в ряды в круге радиуса $R = \infty$, ряд (7.2) также имеет радиус сходимости $R = \infty$, то есть сходится для любого t [35].

6. При решении систем дифференциальных уравнений каждая компонента решения ищется в виде (7.2).

Для определения коэффициентов ряда (7.2) используются два метода: метод неопределенных коэффициентов и метод последовательного дифференцирования.

7.1.2. Метод неопределенных коэффициентов

При использовании этого метода искомое решение $x(t)$ подбирается в виде ряда (7.2), находятся производные $x'(t)$, $x''(t)$, ..., $x^{(n)}(t)$; все функции, входящие в дифференциальное уравнение, раскладываются (в предположении, что они могут быть разложены) в степенные ряды по степеням $(t - t_0)$. Полученные ряды подставляют в уравнение и находят неопределенные коэффициенты c_n , $n = 0, 1, \dots$, путем приравнивания выражений при одинаковых

степенях $(t - t_0)$ в левой и правой частях уравнения. Кроме того, используются еще соотношения, учитывающие заданные начальные условия.

Алгоритм решения дифференциального уравнения методом неопределенных коэффициентов

1. Записать искомое решение в виде степенного ряда

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^n = c_0 + c_1(t - t_0) + \dots + c_n(t - t_0)^n + \dots$$

с неопределенными коэффициентами c_n , $n = 0, 1, \dots$. Найти производные, входящие в дифференциальное уравнение, - получить выражения для производных в виде рядов, коэффициенты которых выразятся через c_n , $n = 0, 1, \dots$

2. Разложить функции, входящие в уравнение, в степенные ряды по степеням $(t - t_0)$.

3. Подставить полученные в пунктах 1,2 выражения в заданное уравнение и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $(t - t_0)$.

4. Используя начальные условия, решить полученную в пункте 3 систему относительно коэффициентов c_n , $n = 0, 1, \dots$, и выписать решение дифференциального уравнения.

Пример 7.1. Решить задачу Коши:

$$x' + 2x = 2 - 3t, \quad x(0) = 0.$$

Решение. 1. Будем искать решение в виде ряда (7.3), $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, так

как здесь начальное условие задано при $t_0 = 0$. Тогда

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1} \quad \text{или} \quad x'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} t^n.$$

2. Функция $f(t) = 2 - 3t$ представлена по степеням t : $2 - 3t = 2t^0 - 3t^1$.

3. Подставляя выражения для $x(t)$ и $x'(t)$ в заданное уравнение, получаем равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) c_{n+1} + 2c_n] t^n = 2 - 3t.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой частях последнего равенства, получаем систему:

$$\begin{array}{l|l} t^0: & c_1 + 2c_0 = 2, \\ t^1: & 2c_2 + 2c_1 = -3, \\ t^n, n > 1: & (n+1)c_{n+1} + 2c_n = 0. \end{array}$$

4. Из начального условия $x(0) = 0$ получаем $c_0 = 0$, поэтому первые два уравнения системы дают $c_1 = 2$, $c_2 = -\frac{3}{2}$.

Для определения коэффициентов c_n , $n > 2$, используя последнее уравнение системы, запишем $c_{n+1} = -\frac{2}{n+1}c_n$. Заменив n на $n-1$, получим $c_n = -\frac{2}{n}c_{n-1}$, $n = 3, 4, \dots$. Далее, заменив $n-1$ на $n-2$, получим $c_{n-1} = -\frac{2}{n-1}c_{n-2}$, $n = 4, 5, \dots$ и так далее. Таким образом,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{-2}{n}c_{n-1} = \frac{-2}{n} \frac{-2}{n-1}c_{n-2} = \dots = \frac{-2}{n} \frac{-2}{n-1} \dots \frac{-2}{3}c_2 = \\ &= \frac{(-1)^{n-2} 2^{n-2}}{n(n-1)\dots 3}c_2 = \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n}c_2 = \frac{(-1)^n 2^n}{2n!}c_2. \end{aligned}$$

Учитывая, что $c_2 = -\frac{3}{2}$, окончательно получаем $c_n = \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \left(-\frac{7}{4}\right)$, $n \geq 2$.

Таким образом, решение заданного уравнения можно записать в виде

$$x(t) = 2t - \frac{7}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} t^n.$$

Учитывая равенство $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} t^n = e^{-2t}$, получаем окончательный от-

вет:

$$x(t) = 2t - \frac{7}{4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} t^n - 1 + 2t \right) = -\frac{7}{4} e^{-2t} + \frac{7}{4} - \frac{3}{2} t.$$

Заметим, что заданное уравнение является простейшим линейным уравнением первого порядка. В разд. 2 рассматриваются точные аналитические методы решения таких уравнений и приведено решение данной задачи одним из них (см. пример 2.16).

Пример 7.2. Решить задачу Коши:

$$x'' - tx' + x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Решение. 1. Будем искать решение в виде ряда $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, так как

начальные условия заданы при $t_0 = 0$. Тогда

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} t^n,$$

$$x''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} t^n.$$

2. Функция $f(t) = 1$ уже представлена по степеням t : $1 = 1 \cdot t^0$.

3. Подставляя выражения для $x(t)$, $x'(t)$ и $x''(t)$ в заданное уравнение, получаем равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2) c_{n+2} t^n - (n+1) c_{n+1} t^{n+1} + c_n t^n] = 1.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой частях последнего равенства, получаем систему:

$$\begin{array}{l|l} t^0: & 2 \cdot 1 \cdot c_2 + c_0 = 1, \\ t^1: & 2 \cdot 3 \cdot c_3 - c_1 + c_1 = 0, \\ t^2: & 3 \cdot 4 \cdot c_4 - 2 \cdot c_2 + c_2 = 0, \\ t^3: & 4 \cdot 5 \cdot c_5 - 3 \cdot c_3 + c_3 = 0, \\ t^4: & 5 \cdot 6 \cdot c_6 - 4 \cdot c_4 + c_4 = 0, \\ \dots & \dots \\ t^n: & (n+2)(n+1) c_{n+2} - n c_n + c_n = 0. \end{array}$$

4. Из начальных условий находим $c_0 = c_1 = 0$, так как $x(t)|_{t=0} = c_0$, $x'(t)|_{t=0} = c_1$.

Таким образом, получаем $c_2 = \frac{1}{1 \cdot 2}$, $c_3 = 0$, $c_4 = \frac{c_2}{3 \cdot 4}$, $c_5 = 0$, $c_6 = \frac{3c_4}{5 \cdot 6} \dots$

$c_{n+2} = c_n \frac{n-1}{(n+2)(n+1)}$. Очевидно, что коэффициенты с нечетными номерами равны нулю. Найдём выражение для коэффициентов с четными номерами.

Для этого заменим $n+2$ на $2n$: $c_{2n} = c_{2n-2} \frac{2n-3}{2n(2n-1)}$. Придавая последовательно n значения $(n-1), (n-2), \dots, 2$, находим

$$c_{2n-2} = c_{2n-4} \frac{2n-5}{(2n-2)(2n-3)}, c_{2n-4} = c_{2n-6} \frac{2n-7}{(2n-4)(2n-5)}, \dots, c_4 = c_2 \frac{1}{4 \cdot 3}, c_2 = \frac{1}{1 \cdot 2}.$$

Поэтому

$$c_{2n} = \frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{(2n-3)!!}{(2n)!},$$

где $(2n-3)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)$.

В результате получаем решение задачи Коши в виде

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} t^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!} t^{2n}.$$

Заметим, что в данном примере решалась задача Коши для линейного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами (см. разд. 2). Поскольку удалось получить формулу для общего члена ряда, то получено точное решение. Это решение является суммой ряда и представляет собой неэлементарную функцию, определенную всюду, так как радиус сходимости ряда равен $+\infty$.

Пример 7.3. Решить задачу Коши:

$$x'' + e^{2t} x = 3t^2 - 5, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -2.$$

Решение. 1. Будем искать решение в виде ряда

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5 + \dots,$$

поскольку начальные условия заданы при $t_0 = 0$. Тогда

$$x'(t) = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + 4c_4 t^3 + 5c_5 t^4 + \dots,$$

$$x''(t) = 2c_2 + 6c_3 t + 12c_4 t^2 + 20c_5 t^3 + \dots$$

2. Функция e^{2t} представляется рядом

$$e^{2t} = 1 + \frac{2t}{1!} + \frac{4t^2}{2!} + \frac{8t^3}{3!} + \frac{16t^4}{4!} + \frac{32t^5}{5!} + \dots$$

3. Подставляя выражения для $x(t)$, $x''(t)$ и e^{2t} в заданное уравнение, получаем равенство

$$\begin{aligned} & 2c_2 + 6c_3 t + 12c_4 t^2 + 20c_5 t^3 + \dots + \left(1 + \frac{2t}{1!} + \frac{4t^2}{2!} + \frac{8t^3}{3!} + \right. \\ & \left. + \frac{16t^4}{4!} + \frac{32t^5}{5!} + \dots\right)(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5 + \dots) = 3t^2 - 5. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой частях последнего равенства, получаем систему:

$$\begin{array}{l|l}
 t^0: & 2c_2 + c_0 = -5, \\
 t^1: & 6c_3 + c_1 + 2c_0 = 0, \\
 t^2: & 12c_4 + c_2 + 2c_1 + 2c_0 = 3, \\
 t^3: & 20c_5 + c_3 + 2c_2 + 2c_1 + \frac{4}{3}c_0 = 0, \\
 \dots & \dots
 \end{array}$$

4. Из начальных условий находим $c_0 = 1$, $c_1 = -2$, так как $x(t)|_{t=0} = c_0$, $x'(t)|_{t=0} = c_1$. Таким образом,

$$c_2 = \frac{-5 - c_0}{2} = -3, \quad c_3 = \frac{-2c_0 - c_1}{6} = 0, \quad c_4 = \frac{2}{3}, \quad c_5 = \frac{13}{30}, \dots$$

В результате получаем решение задачи Коши в виде

$$x(t) = 1 - 2t - 3t^2 + \frac{2}{3}t^4 + \frac{13}{30}t^5 + \dots$$

Здесь, в отличие от предыдущего примера, где также решалось линейное уравнение с переменными коэффициентами, формула общего члена ряда не получена. Относительно функции $x(t)$ можно утверждать только, что она определена в некоторой окрестности точки $t_0 = 0$. В качестве приближенного решения уравнения можно взять любую частичную сумму ряда (см. (7.4)), например $x(t) = 1 - 2t - 3t^2 + \frac{2}{3}t^4$ при $n = 4$.

Пример 7.4. Решить задачу Коши:

$$x'' + 4tx' + (t+2)^2 x = 2t + 3, \quad x(1) = 1, \quad x'(1) = -2.$$

Решение. 1. Будем искать решение в виде ряда (7.2):

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-1)^n = c_0 + c_1(t-1) + c_2(t-1)^2 + c_3(t-1)^3 + c_4(t-1)^4 + c_5(t-1)^5 + \dots,$$

так как $t_0 = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
 x'(t) &= c_1 + 2c_2(t-1) + 3c_3(t-1)^2 + 4c_4(t-1)^3 + 5c_5(t-1)^4 + \dots, \\
 x''(t) &= 2c_2 + 6c_3(t-1) + 12c_4(t-1)^2 + 20c_5(t-1)^3 + \dots
 \end{aligned}$$

2. Представим функции, входящие в уравнение, по степеням $(t-1)$:

$$\begin{aligned}
 4t &= 4 + 4(t-1), \quad (t+2)^2 = [(t-1) + 3]^2 = 9 + 6(t-1) + (t-1)^2, \\
 2t + 3 &= 5 + 2(t-1).
 \end{aligned}$$

3. Подставляя полученные выражения в заданное уравнение, получаем равенство

$$2c_2 + 6c_3(t-1) + 12c_4(t-1)^2 + 20c_5(t-1)^3 + \dots + (4+4(t-1))(c_1 + 2c_2(t-1) + 3c_3(t-1)^2 + 4c_4(t-1)^3 + 5c_5(t-1)^4 + \dots) + (9+6(t-1) + (t-1)^2)(c_0 + c_1(t-1) + c_2(t-1)^2 + c_3(t-1)^3 + c_4(t-1)^4 + c_5(t-1)^5 + \dots) = 5 + 2(t-1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(t-1)$ в левой и правой частях последнего равенства, получаем систему:

$$\begin{array}{lcl} (t-1)^0: & 2c_2 + 4c_1 + 9c_0 = 5, \\ (t-1)^1: & 6c_3 + 13c_1 + 8c_2 + 6c_0 = 2, \\ (t-1)^2: & 12c_4 + 12c_3 + 17c_2 + 6c_1 + c_0 = 0, \\ (t-1)^3: & 20c_5 + 16c_4 + 21c_3 + 6c_2 + c_1 = 0, \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

4. Из начальных условий находим $c_0 = 1$, $c_1 = -2$, так как $x(t) \Big|_{t=1} = c_0$, $x'(t) \Big|_{t=1} = c_1$.

Таким образом, $c_2 = 2$, $c_3 = 1$, $c_4 = -\frac{35}{12}$, $c_5 = \frac{47}{60}$, ...

В результате получаем решение задачи Коши в виде

$$x(t) = 1 - 2(t-1) + 2(t-1)^2 + (t-1)^3 - \frac{35}{12}(t-1)^4 + \frac{47}{60}(t-1)^5 + \dots$$

Здесь, как и в предыдущем примере, найдено приближенное решение задачи Коши. Функция $x(t)$ определена в некоторой окрестности точки $t_0 = 1$. В качестве приближенного решения уравнения можно взять любую частичную сумму ряда (см. (7.4)), например $x(t) = 1 - 2(t-1) = 3 - 2t$ при $n = 1$ или $x(t) = 1 - 2(t-1) + 2(t-1)^2 = 2t^2 - 6t + 5$ при $n = 2$ и так далее.

Пример 7.5. Найти общее решение уравнения

$$x'' + 2t^2 x = 0.$$

Решение. 1,2. Будем искать решение в виде ряда (см. п.2 замечания 7.1)

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

$$\text{Тогда } x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} t^n.$$

$$\text{Аналогично получается } x''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} t^n.$$

3. Подставляя выражения для $x(t)$ и $x''(t)$ в заданное уравнение, получаем равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} t^n + 2t^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0,$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} t^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+2} = 0.$$

Учитывая, что во втором слагаемом младшая степень t равна 2, перепишем равенство в виде

$$2c_2 + 6c_3 t + \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+4) c_{n+4} t^{n+2} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+2} = 0.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой частях последнего равенства:

$$\begin{array}{l|l} t^0: & 2c_2 = 0, \\ t^1: & 6c_3 = 0, \\ t^{n+2}: & (n+3)(n+4) c_{n+4} = -2c_n, \quad n=0,1,\dots \end{array}$$

Получили $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ и рекуррентное соотношение для коэффициентов c_n , $n \geq 4$. Поскольку $c_2 = 0$, то равны нулю коэффициенты $c_6, c_{10}, \dots$, и вообще $c_n = 0$ для $n = 4k - 2$. Аналогично из равенства $c_3 = 0$ следует $c_n = 0$ для $n = 4k - 1$. Таким образом, остается рассмотреть коэффициенты c_n для $n = 4k$ (то есть $c_4, c_8, \dots$) и для $n = 4k - 3$ (то есть $c_3, c_7, \dots$). Из имеющегося рекуррентного соотношения следует $4k(4k+1)c_{4k+1} = -2c_{4k-3}$, или

$$c_{4k+1} = -\frac{2}{4k(4k+1)} c_{4k-3}. \text{ Заменив в этом равенстве } k \text{ на } (k-1), \text{ получаем}$$

$$c_{4k-3} = -\frac{2}{4(k-1)(4k-3)} c_{4k-7}. \text{ Проводя последовательно подстановки, на-}$$

$$\text{ходим } c_{4k+1} = \frac{(-1)^k 2^k}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \dots 4k(4k+1)} c_1, \quad k = 1, 2, \dots \text{ Аналогично}$$

$$c_{4k} = \frac{(-1)^k 2^k}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \dots (4k-1) \cdot 4k} c_0, \quad k = 1, 2, \dots$$

4. Решение уравнения записывается в виде суммы:

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k t^{4k}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \dots (4k-1) \cdot 4k} + c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k t^{4k+1}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \dots 4k(4k+1)} =$$

$$= c_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k t^{4k}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \dots (4k-1) \cdot 4k} \right) + c_1 \left(t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k t^{4k+1}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \dots 4k(4k+1)} \right).$$

Суммы рядов определяют два линейно независимых частных решения уравнения, то есть получено общее решение $x(t) = c_0 x_1(t) + c_1 x_2(t)$, где c_0, c_1 - произвольные постоянные. Таким образом, получено точное решение, представляющее собой неэлементарную функцию.

Пример 7.6. Найти общее решение уравнения

$$x'' - t^2 x = 0.$$

Решение. 1,2. Будем искать решение в виде ряда (см. п.2 замечания 7.1)

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

$$\text{Тогда } x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} t^n.$$

$$\text{Аналогично получается } x''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} t^n.$$

3. Подставляя выражения для $x(t)$ и $x''(t)$ в заданное уравнение, получаем равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} t^n - t^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0,$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+2} = 0.$$

Из этого равенства имеем

$$\begin{array}{l|l} t^0: & 1 \cdot 2 c_2 = 0, \\ t^1: & 2 \cdot 3 c_3 = 0, \\ t^2: & 3 \cdot 4 c_4 - c_0 = 0, \\ t^3: & 4 \cdot 5 c_5 - c_1 = 0, \\ \dots & \dots \end{array}$$

Поскольку $c_2 = c_3 = 0$, то тождество можно переписать в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+4) c_{n+4} t^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+2} = 0,$$

поэтому $c_{n+4} = \frac{c_n}{(n+3)(n+4)}$, $n=0,1,\dots$

Заметим, что через c_0 выражаются коэффициенты с номерами 4, 8, 12, 16, ..., то есть c_{4n} при $n=1,2,\dots$; через c_1 - коэффициенты с номерами 5, 9, 13, 17, ..., то есть c_{4n+1} при $n=1,2,\dots$. Остальные коэффициенты выражаются через c_2 и c_3 и поэтому равны нулю. Получим выражения для c_{4n} и c_{4n+1} . Для этого в записанном выше равенстве заменим $(n+4)$ на $4n$ и $(4n+1)$. Получим рекуррентные соотношения

$$c_{4n} = \frac{c_{4n-4}}{(4n-1)4n}, \quad c_{4n+1} = \frac{c_{4n-3}}{4n(4n+1)},$$

из которых, заменяя n значениями $(n-1)$, $(n-2)$, ..., 1, находим:

$$c_{4n-4} = \frac{c_{4n-8}}{(4n-5)(4n-4)}, \quad c_{4n-8} = \frac{c_{4n-12}}{(4n-9)(4n-8)}, \quad \dots, \quad c_8 = \frac{c_4}{7 \cdot 8}, \quad c_4 = \frac{c_0}{3 \cdot 4};$$

$$c_{4n-3} = \frac{c_{4n-7}}{(4n-4)(4n-3)}, \quad c_{4n-7} = \frac{c_{4n-11}}{(4n-8)(4n-7)}, \quad \dots, \quad c_9 = \frac{c_5}{8 \cdot 9}, \quad c_5 = \frac{c_1}{4 \cdot 5}.$$

Поэтому $c_{4n} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (4n-1)4n} c_0$, $c_{4n+1} = \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 4n(4n+1)} c_1$, $n=1,2,\dots$

4. Решение уравнения записывается в виде суммы:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_0 + c_0 \sum_{n=1}^{\infty} c_{4n} t^{4n} + c_1 t + c_1 \sum_{n=1}^{\infty} c_{4n+1} t^{4n+1} = \\ &= c_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{4n}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (4n-1)4n} \right) + c_1 \left(t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{4n+1}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 4n(4n+1)} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, получено точное решение в виде неэлементарной функции.

Заметим, что суммы рядов (как и в предыдущем примере) определяют два линейно независимых частных решения уравнения, то есть получено общее решение $x(t) = c_0 x_1(t) + c_1 x_2(t)$, где c_0, c_1 - произвольные постоянные.

Пример 7.7. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 9t, & x(0) = 1, \\ y' = 2x + y + 4e^t, & y(0) = 2. \end{cases}$$

Решение. 1. Согласно п.6 замечания 7.1 решение ищем в виде рядов

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5 + \dots,$$

$$y(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5 + \dots$$

Тогда

$$x'(t) = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + 4c_4 t^3 + 5c_5 t^4 + \dots,$$

$$y'(t) = b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + 4b_4 t^3 + 5b_5 t^4 + \dots$$

2. Функция e^t представляется рядом $e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \dots$

3. Подставляя выражения для $x(t)$, x' , $y(t)$, y' и e^t в заданное уравнение, получаем равенства

$$c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + 4c_4 t^3 + 5c_5 t^4 + \dots = (c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5 + \dots) + \\ + 2(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5 + \dots) - 9t;$$

$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + 4b_4 t^3 + 5b_5 t^4 + \dots = 2(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5 + \dots) + \\ + (b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5 + \dots) + 4\left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \dots\right).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой частях полученных равенств:

$$\begin{array}{l|l} t^0: & c_1 = c_0 + 2b_0, \\ t^1: & 2c_2 = c_1 + 2b_1 - 9, \\ t^2: & 3c_3 = c_2 + 2b_2, \\ \dots & \dots \\ t^{n-1}: & nc_n = c_{n-1} + 2b_{n-1}, \quad n \geq 3; \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} t^0: & b_1 = 2c_0 + b_0 + 4, \\ t^1: & 2b_2 = 2c_1 + b_1 + 4, \\ t^2: & 3b_3 = 2c_2 + b_2 + 2, \\ \dots & \dots \\ t^{n-1}: & nb_n = 2c_{n-1} + b_{n-1} + \frac{4}{(n-1)!}, \quad n \geq 3. \end{array}$$

4. Из начальных условий имеем $c_0 = 1$, $b_0 = 2$, так как $x(t)|_{t=0} = c_0$, $y(t)|_{t=0} = b_0$.

Таким образом, первые равенства полученной системы дают $c_1 = 5$, $b_1 = 8$, вторые равенства: $c_2 = \frac{5 + 16 - 9}{2} = 6$, $b_2 = \frac{10 + 8 + 4}{2} = 11$. Далее после-

довательно находятся остальные коэффициенты из рекуррентных соотношений $nc_n = c_{n-1} + 2b_{n-1}$, $nb_n = 2c_{n-1} + b_{n-1} + \frac{4}{(n-1)!}$, $n \geq 3$:

$$c_3 = \frac{6+22}{3} = \frac{28}{3}, \quad b_3 = \frac{12+11+2}{3} = \frac{25}{3} \text{ и так далее.}$$

В результате (ограничиваясь тремя первыми членами для каждого ряда) получаем решение задачи Коши в виде

$$x(t) = 1 + 5t + 6t^2 + \frac{28}{3}t^3 + \dots, \quad y(t) = 2 + 8t + 11t^2 + \frac{25}{3}t^3 + \dots$$

Заметим, что для этой линейной системы уравнений с постоянными коэффициентами может быть получено точное решение в элементарных функциях (см. пример 4.43).

7.1.3. Метод последовательного дифференцирования

Согласно этому методу решение дифференциального уравнения ищется в виде степенного ряда (7.2):

$$x(t) = c_0 + c_1(t - t_0) + c_2(t - t_0)^2 + \dots + c_n(t - t_0)^n + \dots,$$

коэффициенты c_n которого определяются по формуле

$$c_n = \frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

то есть решение ищется в виде ряда Тейлора:

$$x(t) = x(t_0) + \frac{x'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{x''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \dots + \frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \dots \quad (7.5)$$

Часть коэффициентов ряда (7.5) определяется начальными условиями, остальные находятся путем последовательного дифференцирования обеих частей заданного дифференциального уравнения. Например, в задаче Коши (7.1), (1.8) начальные условия определяют первые n коэффициентов.

Заметим, что в частном случае $t_0 = 0$ решение ищется в виде ряда Маклорена

$$x(t) = x(0) + \frac{x'(0)}{1!}t + \frac{x''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{x^{(n)}(0)}{n!}t^n + \dots \quad (7.6)$$

Алгоритм решения дифференциального уравнения методом последовательного дифференцирования

1. Записать искомое решение в виде степенного ряда

$$x(t) = x(t_0) + \frac{x'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{x''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \dots + \frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \dots$$

2. Дифференцируя последовательно обе части заданного дифференциального уравнения с учетом начальных условий, найти коэффициенты ряда и выписать решение.

Пример 7.8. Решить задачу Коши:

$$x' = t^2 + x^2, \quad x(0) = 2.$$

Решение. Точное решение данного уравнения не может быть записано в аналитической форме. В разд.1.2 (пример 1.7) это решение получено при помощи графического метода (метода изоклин). Решим его методом последовательного дифференцирования, следуя алгоритму при $t_0 = 0$.

1. Будем искать решение в виде ряда (7.6):

$$x(t) = x(0) + \frac{x'(0)}{1!}t + \frac{x''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{x^{(n)}(0)}{n!}t^n + \dots$$

2. Коэффициенты ряда находим при помощи последовательного дифференцирования:

$$\begin{aligned} x(0) &= 2, \\ x'(t) &= t^2 + x^2, & x'(0) &= 0^2 + x^2(0) = 0^2 + 2^2 = 4, \\ x''(t) &= 2t + 2xx', & x''(0) &= 2 \cdot 0 + 2x(0)x'(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16, \\ x'''(t) &= 2 + 2x'^2 + 2xx'', & x'''(0) &= 2 + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 2 \cdot 16 = 98, \\ x^{IV}(t) &= 2(3x'x'' + xx'''), & x^{IV}(0) &= 776, \\ x^V(t) &= 2(3x''^2 + 4x'x''' + xx^{IV}), & x^V(0) &= 7776, \\ & \dots \end{aligned}$$

Таким образом, имеем $c_0 = 2$, $c_1 = 4$, $c_2 = \frac{16}{2!}$, $c_3 = \frac{98}{3!}$, $c_4 = \frac{776}{4!}$, $c_5 = \frac{7776}{5!}$, ... и решение задачи Коши может быть записано в виде

$$x(t) = 2 + 4t + 8t^2 + \frac{49}{3}t^3 + \frac{97}{3}t^4 + \frac{324}{5}t^5 + \dots$$

Пример 7.9. Решить задачу Коши:

$$x'' = t + x^2, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

Решение. 1. Будем искать решение в виде ряда (7.6), так как $t_0 = 0$:

$$x(t) = x(0) + \frac{x'(0)}{1!}t + \frac{x''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{x^{(n)}(0)}{n!}t^n + \dots$$

2. Коэффициенты ряда находим при помощи последовательного дифференцирования:

$$\begin{aligned}
x(0) &= 0, \quad x'(0) = 1, \\
x''(t) &= t + x^2, & x''(0) &= 0, \\
x'''(t) &= 1 + 2xx', & x'''(0) &= 1, \\
x^{IV}(t) &= 2x'x'' + 2xx''', & x^{IV}(0) &= 2, \\
x^V(t) &= 2(3x'x'' + xx'''), & x^V(0) &= 0, \\
x^VI(t) &= 2(3x''^2 + 4x'x''' + xx^{IV}), & x^VI(0) &= 8, \\
x^VII(t) &= 2(10x''x''' + 5x'x^{IV} + xx^V), & x^VII(0) &= 20, \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Таким образом, $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = \frac{1}{3!}$, $c_4 = \frac{2}{4!}$, $c_5 = 0$, $c_6 = \frac{8}{6!}$, $c_7 = \frac{20}{7!}$, и решение задачи Коши получено в виде

$$x(t) = t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{90}t^6 + \frac{1}{252}t^7 + \dots$$

Пример 7.10. Решить задачу Коши:

$$x'' = tx' - x, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

Решение. 1. Будем искать решение в виде ряда (7.6), так как $t_0 = 0$:

$$x(t) = x(0) + \frac{x'(0)}{1!}t + \frac{x''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{x^{(n)}(0)}{n!}t^n + \dots,$$

2. Два коэффициента ряда получаем из начальных условий: $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$. Следующий коэффициент находим из заданного уравнения, подставляя $t = 0$: $x''(0) = 0 \cdot x'(0) - x(0) = -1$. Далее, последовательно дифференцируем равенство $x'' = tx' - x$:

$$x''' = x' + tx'' - x' = tx''; \quad x^{IV} = x'' + tx'''; \quad x^V = 2x''' + tx^{IV}; \quad x^VI = 3x^{IV} + tx^V, \dots$$

Замечая закономерность, записываем $x^{(n)}(t) = (n-3)x^{(n-2)}(t) + tx^{(n-1)}(t)$.

Из полученного соотношения при $t = 0$ имеем $x^{(n)}(0) = (n-3)x^{(n-2)}(0)$. Заметим, что полученное равенство связывает производные четных порядков с производными четных порядков, а производные нечетных порядков - с производными нечетных порядков. Для учета этого факта представим полученное равенство в виде совокупности двух равенств (отдельно для производных четных и нечетных порядков): $x^{(2k)}(0) = (2k-3)x^{(2k-2)}(0)$, $x^{(2k+1)}(0) = (2k-2)x^{(2k-1)}(0)$. Теперь, поскольку $x'(0) = 0$, становится ясно, что производные всех нечетных порядков при $t = 0$ равны нулю: $x^{(2k+1)}(0) = 0$ для всех k . Из равенства $x^{(2k)}(0) = (2k-3)x^{(2k-2)}(0)$, заменив k на $k-1$, получим $x^{(2k-2)}(0) = (2k-5)x^{(2k-4)}(0)$. Повторяя процедуру, находим

$$x^{(2k)}(0) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-3) x''(0) = -1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-3).$$

Решение задачи Коши получено как сумма ряда

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 1 - \frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{4!}t^4 - \frac{3}{6!}t^6 - \frac{3 \cdot 5}{8!}t^8 - \dots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-3)}{(2k)!}t^{2k} - \dots = \\
 &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-3)}{(2k)!}t^{2k}.
 \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что полученный ряд сходится всюду и определяет решение заданного уравнения при всех значениях t .

Пример 7.11. Решить задачу Коши:

$$x'' = 2tx' + 4x, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

Решение. 1. Будем искать решение в виде ряда (7.6), так как $t_0 = 0$:

$$x(t) = x(0) + \frac{x'(0)}{1!}t + \frac{x''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{x^{(n)}(0)}{n!}t^n + \dots$$

2. Коэффициенты ряда находим при помощи последовательного дифференцирования:

$$\begin{aligned}
 x(0) &= 0, \quad x'(0) = 1, \\
 x''(t) &= 2tx' + 4x, & x''(0) &= 0, \\
 x'''(t) &= 2x' + 2tx'' + 4x' = 6x' + 2tx'', & x'''(0) &= 6, \\
 x^{IV}(t) &= 6x'' + 2x'' + 2tx''' = 8x'' + 2tx''', & x^{IV}(0) &= 0, \\
 x^V(t) &= 8x''' + 2x''' + 2tx^{IV} = 10x''' + 2tx^{IV}, & x^V(0) &= 60, \\
 x^{VI}(t) &= 12x^{IV} + 2tx^V, & x^{VI}(0) &= 0, \\
 x^{VII}(t) &= 14x^V + 2tx^{VI}, & x^{VII}(0) &= 840, \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Заметим, что при записи производных можно установить закономерность и методом индукции доказать справедливость равенства $x^{(n)}(t) = 2tx^{(n-2)}(t) + 2tx^{(n-1)}(t)$, а из него при $t=0$ получить соотношение $x^{(n)}(0) = 2nx^{(n-2)}(0)$. Далее при четных и нечетных n (см. пример 7.10) определяем коэффициенты $c_{2k} = \frac{x^{(2k)}(0)}{(2k)!} = 0$, $c_{2k+1} = \frac{x^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} = \frac{1}{k!}$. Таким образом, решение задачи Коши имеет вид

$$x(t) = t + t^3 + \dots + \frac{t^{2k+1}}{k!} + \dots = t(1 + t^2 + \dots + \frac{t^{2k}}{k!} + \dots) = te^{t^2}.$$

Пример 7.12. Решить задачу Коши:

$$x' + 2x = 2 - 3t, \quad x(0) = 0.$$

Решение. 1. Будем искать решение в виде ряда (7.6), так как $t_0 = 0$:

$$x(t) = x(0) + \frac{x'(0)}{1!} t + \frac{x''(0)}{2!} t^2 + \dots + \frac{x^{(n)}(0)}{n!} t^n + \dots$$

2. Первый коэффициент ряда получаем из начального условия: $x(0) = 0$, следующий коэффициент - из заданного уравнения, подставляя $t = 0$: $x'(0) = 2 - 3 \cdot 0 - 2x(0) = 2$. Далее, последовательно дифференцируем равенство $x' = 2 - 3t - 2x$: $x'' = -3 - 2x'$, $x''' = -2x''$ и, очевидно, $x^{(n)}(t) = -2x^{(n-1)}(t)$.

Полагая $t = 0$, находим $x''(0) = -3 - 2x'(0) = -7$.

В рекуррентном соотношении $x^{(n)}(t) = -2x^{(n-1)}(t)$, подставив вместо $x^{(n-1)}(t)$ выражение $-2x^{(n-2)}(t)$, получим $x^{(n)}(t) = -2(-2x^{(n-2)}(t))$ и, продолжив этот процесс, заметим закономерность $x^{(n)}(t) = (-1)^k 2^k x^{(n-k)}(t)$. Выбрав $k = n - 2$, находим $x^{(n)}(t) = (-1)^n 2^{n-2} x''(t)$ для $n \geq 2$. Подставляя $t = 0$, определяем все оставшиеся коэффициенты ряда:

$$x^{(n)}(0) = (-1)^n 2^{n-2} x''(0) = -\frac{7}{4} (-1)^n 2^n.$$

Таким образом, решение задачи Коши имеет вид

$$x(t) = 2t - \frac{7}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} t^n.$$

Преобразовав полученный ряд так же, как и в примере 7.1, окончательно имеем $x(t) = -\frac{7}{4} e^{-2t} + \frac{7}{4} - \frac{3}{2} t$. Результат совпадает с полученным в примерах 2.28, 3.18, 7.1.

Пример 7.13. Решить задачу Коши:

$$x' = tx^2 + 1, \quad x(1) = 0.$$

Решение. 1. Будем искать решение в виде ряда (7.5), так как $t_0 = 1$:

$$x(t) = x(1) + \frac{x'(1)}{1!} (t-1) + \frac{x''(1)}{2!} (t-1)^2 + \dots + \frac{x^{(n)}(1)}{n!} (t-1)^n + \dots$$

2. Коэффициенты ряда находим при помощи последовательного дифференцирования:

$$\begin{aligned} x(1) &= 0, \\ x'(t) &= tx^2 + 1, & x'(1) &= 1, \\ x''(t) &= x^2 + 2tx', & x''(1) &= 0, \\ x'''(t) &= 4xx' + 2tx'^2 + 2txx'', & x'''(1) &= 2, \\ x^{IV}(t) &= 6x'^2 + 6xx'' + 6tx'x'' + 2txx''', & x^{IV}(1) &= 6, \\ &\dots \end{aligned}$$

Решение задачи Коши получено как сумма ряда по степеням $(t-1)$

$$x(t) = t - 1 + \frac{1}{3}(t-1)^3 + \frac{1}{4}(t-1)^4 + \dots$$

Как и ранее, в качестве приближенного решения уравнения можно взять любую частичную сумму ряда, например $x(t) = t - 1$ при $n = 1$, $x(t) = \frac{1}{3}(t-1)^3 + t - 1$ при $n = 3$ и так далее.

Пример 7.14. Решить задачу Коши:

$$x' = \frac{x}{t+x}, \quad x(1) = 2.$$

Решение. 1. Будем искать решение в виде ряда (7.5), так как $t_0 = 1$:

$$x(t) = x(1) + \frac{x'(1)}{1!}(t-1) + \frac{x''(1)}{2!}(t-1)^2 + \dots + \frac{x^{(n)}(1)}{n!}(t-1)^n + \dots$$

2. Коэффициенты ряда находим при помощи последовательного дифференцирования:

$$\begin{aligned} x(1) &= 2, \\ x'(t) &= \frac{x}{t+x}, & x'(1) &= \frac{2}{3}, \\ x''(t) &= \frac{x'(t+x) - x(1+x')}{(t+x)^2} = \frac{tx' - x}{(t+x)^2}, & x''(1) &= \frac{1 \cdot \frac{2}{3} - 2}{(1+2)^2} = -\frac{4}{27}, \\ x'''(t) &= \frac{tx''(t+x) - 2(t+x)(1+x')(tx' - x)}{(t+x)^4} = \frac{tx''(t+x) - 2(1+x')(tx' - x)}{(t+x)^3}, \\ x'''(1) &= \frac{1(-\frac{4}{27})(1+2) - 2(1+\frac{2}{3})(1 \cdot \frac{2}{3} - 2)}{(1+2)^3} = \frac{4}{27}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Решение задачи Коши получено в виде

$$x(t) = 2 + \frac{2}{3}(t-1) - \frac{2}{27}(t-1)^2 + \frac{2}{81}(t-1)^3 + \dots$$

Пример 7.15. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 9t, & x(0) = 1, \\ y' = 2x + y + 4e^t, & y(0) = 2. \end{cases}$$

Решение. 1. Будем искать решение в виде рядов

$$x(t) = x(0) + \frac{x'(0)}{1!}t + \frac{x''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{x^{(n)}(0)}{n!}t^n + \dots,$$

$$y(t) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}t + \frac{y''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}t^n + \dots,$$

так как $t_0 = 0$.

2. Коэффициенты рядов находим при помощи последовательного дифференцирования:

$$\begin{aligned} x(0) &= 1, & y(0) &= 2, \\ x'(t) &= x + 2y - 9t, & y'(t) &= 2x + y + 4e^t, \\ x'(0) &= 1 + 2 \cdot 2 - 9 \cdot 0 = 5, & y'(0) &= 2 \cdot 1 + 2 + 4 = 8, \\ x''(t) &= x' + 2y' - 9, & y''(t) &= 2x' + y' + 4e^t, \\ x''(0) &= 5 + 2 \cdot 8 - 9 = 12, & y''(0) &= 2 \cdot 5 + 8 + 4 = 22, \\ x'''(t) &= x'' + 2y'', & y'''(t) &= 2x'' + y'' + 4e^t, \\ x'''(0) &= 12 + 2 \cdot 22 = 56, & y'''(0) &= 2 \cdot 12 + 22 + 4 = 50, \end{aligned}$$

.....

Решение задачи Коши имеет вид

$$x(t) = 1 + 5t + 6t^2 + \frac{28}{3}t^3 + \dots, \quad y(t) = 2 + 8t + 11t^2 + \frac{25}{3}t^3 + \dots$$

и совпадает с решением, полученным в примере 7.7.

Пример 7.16. Решить задачу Коши для системы уравнений:

$$\begin{cases} x' = t + y^2, & x(1) = -1, \\ y' = tx, & y(1) = 1. \end{cases}$$

Решение. 1. Будем искать решение в виде рядов

$$x(t) = x(1) + \frac{x'(1)}{1!}(t-1) + \frac{x''(1)}{2!}(t-1)^2 + \dots + \frac{x^{(n)}(1)}{n!}(t-1)^n + \dots,$$

$$y(t) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(t-1) + \frac{y''(1)}{2!}(t-1)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(1)}{n!}(t-1)^n + \dots,$$

так как $t_0 = 1$.

2. Коэффициенты рядов находим при помощи последовательного дифференцирования:

$$\begin{aligned}
x(1) &= -1, & y(1) &= 1, \\
x'(t) &= t + y^2, & y'(t) &= tx, \\
x'(1) &= 1 + 1^2 = 2, & y'(1) &= 1 \cdot (-1) = -1, \\
x''(t) &= 1 + 2yy', & y''(t) &= x + tx', \\
x''(1) &= 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) = -1, & y''(1) &= -1 + 1 \cdot 2 = 1, \\
x'''(t) &= 2y'^2 + 2yy'', & y'''(t) &= x' + x' + tx'' = 2x' + tx'', \\
x'''(1) &= 2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4, & y'''(1) &= 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 3,
\end{aligned}$$

.....

Решение задачи Коши получено в виде

$$\begin{aligned}
x(t) &= -1 + 2(t-1) - \frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{2}{3}(t-1)^3 + \dots, \\
y(t) &= 1 - (t-1) + \frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{1}{2}(t-1)^3 + \dots
\end{aligned}$$

Заметим, что в отличие от предыдущего примера здесь решалась задача Коши для линейной системы с переменными коэффициентами. В качестве приближенного решения системы можно взять любую частичную сумму, например

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2(t-1) \\ 1 - (t-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-3 \\ 2-t \end{pmatrix} \text{ при } n=1 \text{ или}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2(t-1) - \frac{1}{2}(t-1)^2 \\ 1 - (t-1) + \frac{1}{2}(t-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2 + 3t - \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2}t^2 - 2t + \frac{5}{2} \end{pmatrix} \text{ при } n=2 \text{ и так далее.}$$

7.2. Метод последовательных приближений

Рассмотрим задачу Коши (1.18):

$$X' = F(t, X), \quad X(t_0) = X_0. \quad (7.7)$$

Будем предполагать, что для задачи (7.7) выполняются условия теоремы 1.2 о существовании и единственности решения. Для построения решения при $t \geq t_0$ проинтегрируем в пределах от t_0 до t левую и правую части уравнения (7.7):

$$X(t) - X_0 = \int_{t_0}^t F(\tau, X(\tau)) d\tau,$$

или

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(\tau, X(\tau)) d\tau. \quad (7.8)$$

Поскольку неизвестная функция находится под знаком интеграла, то уравнение (7.8) является интегральным. Для нахождения его решения применим *метод последовательных приближений* (метод Пикара-Линделефа), который заключается в следующем. Заменяя в правой части (7.8) неизвестную функцию $X(t)$ на X_0 (*нулевое приближение*), получаем *первое приближение*:

$$X_1(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(\tau, X_0) d\tau.$$

Подставляя в правую часть (7.8) вместо неизвестной функции $X(t)$ найденную функцию $X_1(t)$, получаем *второе приближение*:

$$X_2(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(\tau, X_1(\tau)) d\tau.$$

Все последующие приближения строятся по формуле

$$X_n(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(\tau, X_{n-1}(\tau)) d\tau, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.9)$$

Точное решение может быть определено как предел

$$X(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t). \quad (7.10)$$

Геометрический смысл метода иллюстрируется рис.7.1 (последовательные приближения представляют собой кривые, проходящие через общую точку (t_0, X_0)).

З а м е ч а н и е 7.2.

1. В качестве нулевого (начального) приближения можно выбрать любую функцию, достаточно близкую к точному решению. Например, можно брать конечное число членов разложения решения в ряд Тейлора (см. разд.7.1.3).

2. При использовании метода последовательных приближений аналитичность правой части дифференциального уравнения не обязательна, поэтому метод можно применять и в тех случаях, когда разложение решения в степенной ряд невозможно. Таким образом, рассматриваемый подход можно считать более универсальным по сравнению с изложенным в разд.7.1.

3. Метод последовательных приближений может применяться и для решения дифференциальных уравнений n -го порядка. Для этого уравнение надо записать в виде системы (см. разд.1.2).

4. Если построена последовательность $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_n(t)$, ..., то по формуле (7.10) получается точное решение. На практике, как правило, ограни-

чиваются некоторым числом приближений, достаточным для нахождения решения с погрешностью, меньшей заданной величины.

5. Погрешность $e_n(t) = |x(t) - x_n(t)|$ в случае, когда правая часть $f(t, x)$ уравнения в задаче Коши $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, определена и непрерывна в прямоугольнике $|t - t_0| \leq a$, $|x - x_0| \leq b$ и $|f(t, x)| \leq M$, $\left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right| \leq N$, можно оценить по формуле

$$e_n(t) \leq MN^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (7.11)$$

где h полагается равным наименьшему из чисел a или b/M , то есть $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$.

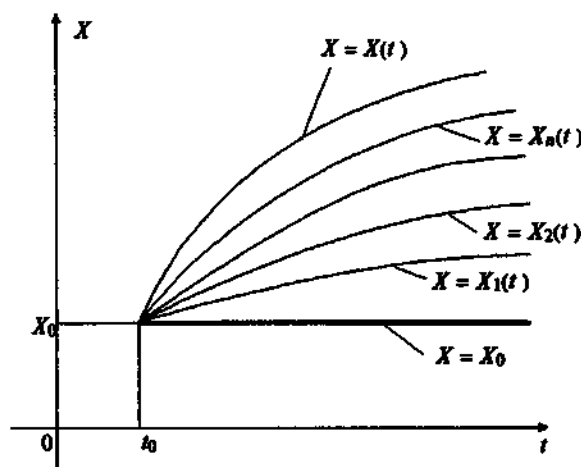


Рис.7.1

Алгоритм решения дифференциального уравнения методом последовательных приближений

1. Задать малое число $\varepsilon > 0$ и положить $n = 1$. В качестве начального приближения выбрать $X(t_0) = X_0$.
2. Найти следующие приближения по формуле

$$X_n(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(\tau, X_{n-1}(\tau)) d\tau, \quad n = 1, 2, \dots$$

3. Оценить погрешность $e_n(t)$ по формуле (7.11). Если $e_n \leq \varepsilon$, процесс завершить: $X(t) = X_n(t)$. В противном случае, увеличить n на 1 и перейти к пункту 2.

Пример 7.17. Методом последовательных приближений решить задачу Коши:

$$x' + 2x = 2 - 3t, \quad x(0) = 0.$$

Решение. Воспользуемся формулой (7.9), где $t_0 = 0$, $x_0 = x(0) = 0$, $f(t, x) = 2 - 3t - 2x$:

$$x_1(t) = \int_0^t (2 - 3\tau - 2x_0) d\tau = 2t - \frac{3}{2}t^2;$$

$$x_2(t) = \int_0^t [2 - 3\tau - 2(2\tau - \frac{3}{2}\tau^2)] d\tau = \int_0^t (2 - 7\tau + 3\tau^2) d\tau = 2t - \frac{7}{2}t^2 + t^3;$$

$$\begin{aligned} x_3(t) &= \int_0^t [2 - 3\tau - 2(2\tau - \frac{7}{2}\tau^2 + \tau^3)] d\tau = \int_0^t (2 - 7\tau + 7\tau^2 - 2\tau^3) d\tau = \\ &= 2t - \frac{7}{2}t^2 + \frac{7}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^4; \end{aligned}$$

$$x_4(t) = \int_0^t [2 - 3\tau - 2(2\tau - \frac{7}{2}\tau^2 + \frac{7}{3}\tau^3 - \frac{1}{2}\tau^4)] d\tau = 2t - \frac{7}{2}t^2 + \frac{7}{3}t^3 - \frac{7}{6}t^4 + \frac{1}{5}t^5.$$

Для того чтобы заметить закономерность, перепишем $x_4(t)$ в виде

$$x_4(t) = 2t - \frac{7}{2}t^2 + \frac{7 \cdot 2}{3!}t^3 - \frac{7 \cdot 2 \cdot 2}{4!}t^4 + \frac{1}{5}t^5.$$

Поскольку коэффициент при последнем слагаемом будет уточняться при вычислении следующего приближения, то его в искомую закономерность включать не будем, обозначая далее коэффициент при старшей степени t через неизвестную постоянную:

$$x_5(t) = 2t - \frac{7}{2}t^2 + \frac{7 \cdot 2}{3!}t^3 - \frac{7 \cdot 2^2}{4!}t^4 + \frac{7 \cdot 2^3}{5!}t^5 + c_6 t^6.$$

Перепишав выражение для $x_5(t)$ в следующем виде

$$x_5(t) = 2t - \frac{7}{4} \cdot \frac{2^2}{2!}t^2 + \frac{7}{4} \cdot \frac{2^3}{3!}t^3 - \frac{7}{4} \cdot \frac{2^4}{4!}t^4 + \frac{7}{4} \cdot \frac{2^5}{5!}t^5 + c_6 t^6,$$

можно предположить справедливость следующей формулы

$$x_n(t) = 2t - \frac{7}{4} \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k (2t)^k}{k!} + c_{n+1} t^{n+1}, \quad \text{где } c_n = -\frac{7}{4} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}, \quad c_{n+1} = -\frac{2}{n+1} c_n.$$

Приведем доказательство сделанного предположения методом математической индукции. Для этого рассмотрим $x_{n+1}(t)$, получаемое из $x_n(t)$ по фор-

муле (7.11), и результат сравним с тем, что задается доказываемой формулой для $(n+1)$:

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t) &= \int_0^t \left[2 - 3\tau - 2(2\tau - \frac{7}{4} \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k (2\tau)^k}{k!} + c_{n+1} \tau^{n+1}) \right] d\tau = \\ &= 2t - \frac{7}{2} t^2 + 2 \cdot \frac{7}{4} \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k 2^k t^{k+1}}{k!(k+1)} - \frac{2c_{n+1}}{n+2} t^{n+2} = \\ &= 2t - \frac{7}{2} t^2 - \frac{7}{4} \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k+1} 2^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!} + c_{n+2} t^{n+2} = \\ &= 2t - \frac{7}{4} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} 2^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!} + c_{n+2} t^{n+2} = 2t - \frac{7}{4} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^k (2t)^k}{k!} + c_{n+2} t^{n+2}. \end{aligned}$$

Таким образом, установлена справедливость формулы

$$x_n(t) = 2t - \frac{7}{4} \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k (2t)^k}{k!} + c_{n+1} t^{n+1}.$$

Перепишем эту формулу, выделив частичную сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2t)^n}{n!}:$$

$$\begin{aligned} x_n(t) &= 2t - \frac{7}{4} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2t)^k}{k!} - 1 + 2t \right) + c_{n+1} t^{n+1} = \\ &= \frac{7}{4} - \frac{3}{2} t - \frac{7}{4} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2t)^k}{k!} + c_{n+1} t^{n+1} = \frac{7}{4} - \frac{3}{2} t - \frac{7}{4} S_n(t) + c_{n+1} t^{n+1}, \end{aligned}$$

где $S_n(t)$ - частичная сумма ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2t)^k}{k!} = e^{-2t}$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) = e^{-2t}$,

то получаем решение рассматриваемой задачи Коши:

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \frac{7}{4} - \frac{3}{2} t - \frac{7}{4} e^{-2t}.$$

Пример 7.18. Методом последовательных приближений решить задачу Коши:

$$x' = 2x, \quad x(0) = 1.$$

Решение. Воспользуемся формулой (7.9), где $t_0 = 0$, $x_0 = x(0) = 1$, $f(t, x) = 2x$:

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t 2x_0 \, d\tau = 1 + \int_0^t 2 \, d\tau = 1 + 2t = x_0 + 2t;$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t 2x_1(\tau) \, d\tau = 1 + \int_0^t 2(1 + 2\tau) \, d\tau = 1 + 2t + 2t^2 = x_1(t) + \frac{(2t)^2}{2};$$

$$x_3(t) = x_0 + \int_0^t 2x_2(\tau) \, d\tau = 1 + \int_0^t 2(1 + 2\tau + 2\tau^2) \, d\tau = 1 + 2t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3 = x_2(t) + \frac{(2t)^3}{3!};$$

$$\begin{aligned} x_4(t) &= x_0 + \int_0^t 2x_3(\tau) \, d\tau = 1 + \int_0^t 2\left(1 + 2\tau + 2\tau^2 + \frac{4}{3}\tau^3\right) \, d\tau \\ &= 1 + 2t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{2}{3}t^4 = x_3(t) + \frac{(2t)^4}{4!}. \end{aligned}$$

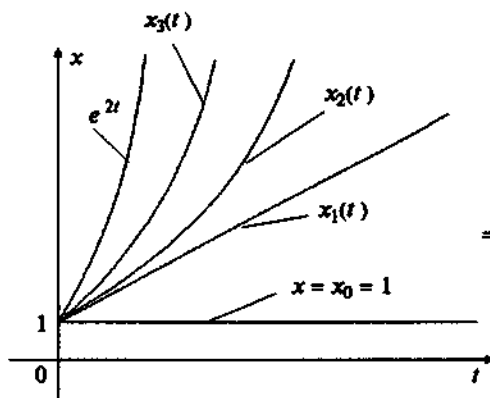


Рис. 7.2

Замечая закономерность и применяя метод математической индукции (см. пример 7.17), можно доказать, что

$$\begin{aligned} x_n(t) &= x_{n-1}(t) + \frac{(2t)^n}{n!} = \\ &= 1 + \frac{2t}{1!} + \frac{(2t)^2}{2!} + \frac{(2t)^3}{3!} + \frac{(2t)^4}{4!} + \dots \\ &\dots + \frac{(2t)^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!}, \end{aligned}$$

а это, очевидно, частичная сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t)^n}{n!} = e^{2t}$. По-

этому $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = e^{2t}$.

Таким образом, в данном примере применение метода последовательных приближений позволяет получить точное решение.

На рис. 7.2 изображена последовательность полученных приближений и для сравнения приведен график точного решения $x(t) = e^{2t}$.

Пример 7.19. Методом последовательных приближений решить задачу Коши:

$$x' = t - x, \quad x(0) = 1.$$

Решение. Воспользуемся формулой (7.9), где $t_0 = 0$, $x_0 = x(0) = 1$, $f(t, x) = t - x$:

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t (\tau - x_0) d\tau = 1 + \int_0^t (\tau - 1) d\tau = 1 - t + \frac{1}{2} t^2;$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t (\tau - x_1(\tau)) d\tau = 1 + \int_0^t (\tau - 1 + \tau - \frac{1}{2} \tau^2) d\tau = 1 - t + t^2 - \frac{1}{6} t^3;$$

$$x_3(t) = x_0 + \int_0^t (\tau - x_2(\tau)) d\tau = 1 + \int_0^t (\tau - 1 + \tau - \tau^2 + \frac{1}{6} \tau^3) d\tau = 1 - t + t^2 - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{24} t^4;$$

$$x_4(t) = x_0 + \int_0^t (\tau - x_3(\tau)) d\tau = 1 + \int_0^t (\tau - 1 + \tau - \tau^2 + \frac{1}{3} \tau^3 - \frac{1}{24} \tau^4) d\tau =$$

$$= 1 - t + t^2 - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{12} t^4 - \frac{1}{120} t^5;$$

.....

Оценим погрешность четвертого приближения. Выберем $a = 1$, $b = 1$. Тогда $|t| \leq 1$, $|x - 1| \leq 1$ или $0 \leq x \leq 2$. Найдем величины M , N , h . Из $|f(t, x)| = |t - x| \leq |t| + |x| \leq 1 + 2 = M$ получаем $M = 3$. Из $\left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right| = 1$ получаем $N = 1$, $h = \min(a, b/M) = \min(1, 1/3) = 1/3$. По формуле (7.11) находим $\varepsilon_4(t) \leq 3 \cdot 1^4 \cdot \frac{1^5}{3^5 \cdot 5!} = \frac{1}{3^4 \cdot 5!} = \frac{1}{9720} = 1,03 \cdot 10^{-4}$.

Замечая закономерность записи приближений $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$, можно предположить и методом математической индукции доказать справедливость равенства (см. пример 7.17)

$$x_n(t) = 1 - t + 2 \left[\frac{1}{2!} t^2 - \frac{1}{3!} t^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} t^n \right] + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} t^{n+1}, \quad n = 3, 4, \dots$$

$$\text{Поэтому } x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = 1 - t + 2 [e^{-t} - (1 - t)] = 2e^{-t} - 1 + t.$$

Пример 7.20. Методом последовательных приближений решить задачу Коши (найти два последовательных приближения и оценить погрешность):

$$x' = t^2 + x^2, \quad x(0) = 2.$$

Решение. Воспользуемся (7.9), где $t_0 = 0$, $x_0 = x(0) = 2$, $f(t, x) = t^2 + x^2$:

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t (\tau^2 + x_0^2) d\tau = 2 + \int_0^t (\tau^2 + 4) d\tau = 2 + 4t + \frac{1}{3}t^3;$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t (\tau^2 + x_1^2(\tau)) d\tau = 2 + \int_0^t [\tau^2 + (2 + 4\tau + \frac{1}{3}\tau^3)^2] d\tau =$$

$$= 2 + 4t + 8t^2 + \frac{17}{3}t^3 + \frac{1}{3}t^4 + \frac{8}{15}t^5 + \frac{1}{63}t^7;$$

Оценим погрешность второго приближения. Выберем $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$. Тогда $|t| \leq a = \frac{1}{2}$, $|x - 2| \leq b = 1$ или $1 \leq x \leq 3$. Из $|f(t, x)| = t^2 + x^2 \leq \frac{1}{4} + 9 = \frac{37}{4}$ получаем $M = \frac{37}{4}$. Из $\left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right| = |2x| \leq 6$ получаем $N = 6$, $h = \min(a, \frac{b}{M}) = \min(\frac{1}{2}, \frac{4}{37}) = \frac{4}{37}$. По формуле (7.11) находим $\epsilon_2(t) \leq \frac{37}{4} \cdot 6^2 \cdot \frac{(\frac{4}{37})^3}{3!} = 0,07$.

Пример 7.21. Методом последовательных приближений решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 9t, & x(0) = 1, \\ y' = 2x + y + 4e^t, & y(0) = 2. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся формулой (7.9) для каждой компоненты решения, учитывая, что $t_0 = 0$, $x_0 = x(0) = 1$, $y_0 = y(0) = 2$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$F(t, X) = \begin{pmatrix} x + 2y - 9t \\ 2x + y + 4e^t \end{pmatrix};$$

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t (x_0 + 2y_0 - 9\tau) d\tau = 1 + \int_0^t (5 - 9\tau) d\tau = 1 + 5t - \frac{9}{2}t^2;$$

$$y_1(t) = y_0 + \int_0^t (2x_0 + y_0 + 4e^\tau) d\tau = 2 + \int_0^t (4 + 4e^\tau) d\tau = -2 + 4t + 4e^t =$$

$$= -2 + 4t + 4(1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots) = 2 + 8t + 2t^2 + \dots + \frac{4}{n!}t^n + \dots;$$

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t (1 + 5\tau - \frac{9}{2}\tau^2 - 4 + 8\tau + 8e^\tau - 9\tau) d\tau = 1 - 3t + 2t^2 - \frac{3}{2}t^3 + 8e^t - 8 =$$

$$= -7 - 3t + 2t^2 - \frac{3}{2}t^3 + 8e^t = -7 - 3t + 2t^2 - \frac{3}{2}t^3 + 8(1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \dots) =$$

$$= 1 + 5t + 6t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \dots;$$

$$\begin{aligned}
 y_2(t) &= 2 + \int_0^t (2 + 10\tau - 9\tau^2 - 2 + 4\tau + 4e^\tau + 4e^{-\tau}) d\tau = 2 + 7t^2 - 3t^3 + 8e^t - 8 = \\
 &= 2 + 7t^2 - 3t^3 + 8(1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \dots) - 8 = 2 + 8t + 11t^2 - \frac{5}{3}t^3 + \dots
 \end{aligned}$$

.....

Найденное решение можно сравнить с полученным в примерах 7.7 и 7.15.

Пример 7.22. Методом последовательных приближений решить задачу Коши (найти второе приближение):

$$\begin{cases} x' = x + ty, & x(1) = 1, \\ y' = 1 - xy, & y(1) = -2. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся формулой (7.9) для каждой компоненты решения, учитывая, что $t_0 = 1$, $x_0 = x(1) = 1$, $y_0 = y(1) = -2$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $F(t, X) = \begin{pmatrix} x + ty \\ 1 - xy \end{pmatrix}$:

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_1^t [x_0 + ty_0] d\tau \\ \int_1^t [1 - x_0y_0] d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_1^t (1 - 2\tau) d\tau \\ \int_1^t (1 + 2) d\tau \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\tau - \tau^2) \Big|_1^t \\ 3\tau \Big|_1^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t - t^2 \\ 3t - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + t - t^2 \\ 3t - 5 \end{pmatrix};$$

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_1^t [x_1(\tau) + \tau y_1(\tau)] d\tau \\ \int_1^t [1 - x_1(\tau)y_1(\tau)] d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_1^t [1 + \tau - \tau^2 + \tau(3\tau - 5)] d\tau \\ \int_1^t [1 - (1 + \tau - \tau^2)(3\tau - 5)] d\tau \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_1^t (1 - 4\tau + 2\tau^2) d\tau \\ \int_1^t (6 + 2\tau - 8\tau^2 + 3\tau^3) d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\tau - 2\tau^2 + \frac{2}{3}\tau^3 \right) \Big|_1^t \\ \left(6\tau + \tau^2 - \frac{8}{3}\tau^3 + \frac{3}{4}\tau^4 \right) \Big|_1^t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + t - 2t^2 + \frac{2}{3}t^3 \\ -\frac{85}{12} + 6t + t^2 - \frac{8}{3}t^3 + \frac{3}{4}t^4 \end{pmatrix}.$$

Пример 7.23. Методом последовательных приближений решить задачу Коши (найти третье приближение):

$$x'' = t + x^2, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

Решение. Согласно п.3 замечания 7.2 запишем уравнение в виде системы, обозначив $y = x'$:

$$\begin{cases} x' = y, & x(0) = 0, \\ y' = t + x^2, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Воспользуемся формулой (7.9), учитывая, что $t_0 = 0$, $x_0 = x(0) = 0$, $y_0 = y(0) = 1$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $F(t, X) = \begin{pmatrix} y \\ t + x^2 \end{pmatrix}$:

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t y_0 d\tau \\ \int_0^t (\tau + x_0^2) d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t 1 d\tau \\ \int_0^t (\tau + 0) d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 + \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix};$$

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t y_1(\tau) d\tau \\ \int_0^t [\tau + x_1^2(\tau)] d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t (1 + \frac{1}{2}\tau^2) d\tau \\ \int_0^t (\tau + \tau^2) d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \frac{1}{6}t^3 \\ 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
X_3(t) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t y_2(\tau) d\tau \\ \int_0^t [\tau + x_2^2(\tau)] d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t (1 + \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{3}\tau^3) d\tau \\ \int_0^t [\tau + (\tau + \frac{1}{6}\tau^3)^2] d\tau \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{12}t^4 \\ 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{15}t^5 + \frac{1}{252}t^7 \end{pmatrix} \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Таким образом, $x_3(t) = t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{12}t^4$ - искомое третье приближение. Его можно сравнить с результатом, полученным в примере 7.9.

7.3. Метод Чаплыгина

Метод Чаплыгина является одним из наиболее точных приближенно-аналитических методов решения дифференциальных уравнений. Он допускает простую оценку погрешностей решения. Рассмотрим его на примере решения задачи Коши

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Идея метода Чаплыгина состоит в аппроксимации искомого решения $x(t)$ на заданном промежутке $[t_0, T]$ двумя последовательностями функций $\{u_n(t)\}, \{v_n(t)\}, n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющих условиям

$$u_n(t) \leq x(t) \leq v_n(t), \quad t \in [t_0, T], \quad u_n(t_0) = v_n(t_0) = x(t_0) = x_0,$$

причем $[v_n(t) - u_n(t)] \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Геометрическая интерпретация метода состоит в том, что для решения $x(t)$ строится "вилка" $[u_n, v_n]$ и указывается процесс, с помощью которого эту "вилку" можно сузить до желаемых размеров (рис.7.3). Абсолютная погрешность приближенного решения будет равна

$$e_n(t) = v_n(t) - u_n(t), \quad t \in [t_0, T].$$

Предположим, что:

1) функция $f(t, x)$ определена и непрерывна в некоторой прямоугольной области $Q = \{0 \leq t \leq t_0 + a, |x - x_0| \leq b\}$, где a и b - заданные положительные числа;

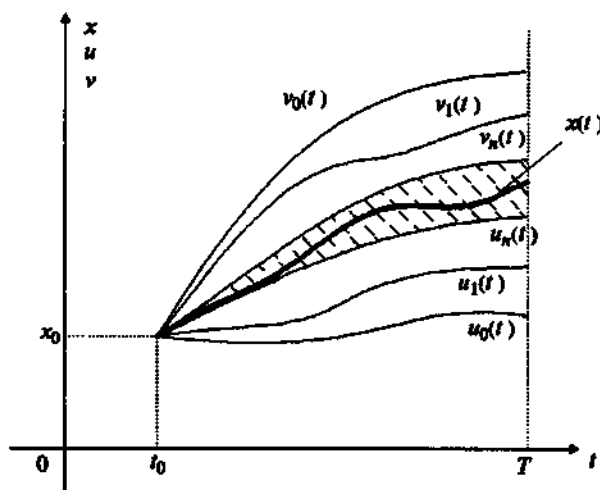


Рис.7.3

2) в области Q выполняется условие $\frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2} \geq 0$;

3) решение ищется на промежутке $[t_0, T]$, где

$$T = t_0 + h, \quad h = \min \left\{ a, \frac{b}{|m|}, \frac{b}{|M|} \right\}, \quad m = \min_Q f(t, x), \quad M = \max_Q f(t, x).$$

Тогда можно использовать следующий алгоритм.

Алгоритм решения задачи Коши методом Чаплыгина

1. Задать число $\varepsilon > 0$ и положить $n = 0$. В качестве начальных приближений методом проб и ошибок выбрать функции $v_0(t)$ и $u_0(t)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} v_0'(t) - f(t, v_0(t)) &\geq 0, \quad u_0'(t) - f(t, u_0(t)) \leq 0, \\ u_0(t) &\leq v_0(t), \quad u_0(t_0) = v_0(t_0) = x_0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Если с выбором начальных приближений возникают трудности, то можно положить $v_0(t) = x_0 + M(t - t_0)$, $u_0(t) = x_0 + m(t - t_0)$.

2. Найти функции $\sigma_n(t)$, $\rho_n(t)$, как решения дифференциальных уравнений

$$\sigma_n' = q_n(t) \sigma_n + \psi_n(t), \quad \sigma_n(t_0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\rho_n' = p_n(t) \rho_n + \varphi_n(t), \quad \rho_n(t_0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$q_n(t) = \frac{f(t, v_n(t)) - f(t, u_n(t))}{v_n(t) - u_n(t)}, \quad p_n(t) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=u_n(t)},$$

$$\psi_n(t) = [v_n'(t) - f(t, v_n(t))], \quad \varphi_n(t) = -[u_n'(t) - f(t, u_n(t))].$$

Поскольку оба уравнения линейные, то для получения их решения можно использовать формулы, которые являются следствием равенства (2.25):

$$\sigma_n(t) = e^{\int_{t_0}^t q_n(\tau) d\tau} \left\{ \int_{t_0}^t \psi_n(\tau) e^{-\int_{t_0}^{\tau} q_n(\xi) d\xi} d\tau \right\},$$

$$\rho_n(t) = e^{\int_{t_0}^t p_n(\tau) d\tau} \left\{ \int_{t_0}^t \varphi_n(\tau) e^{-\int_{t_0}^{\tau} p_n(\xi) d\xi} d\tau \right\}, \quad n=0,1,2,\dots \quad (7.13)$$

3. Положить $v_{n+1}(t) = v_n(t) - \sigma_n(t)$, $u_{n+1}(t) = u_n(t) + \rho_n(t)$.

4. Вычислить $\varepsilon_{n+1}(t) = v_{n+1}(t) - u_{n+1}(t)$. Если $\varepsilon_{n+1}(t) \leq \varepsilon$ для всех $t \in [t_0, T]$, то процесс последовательных приближений закончить и в качестве приближенного решения взять либо одну из функций $v_{n+1}(t)$, $u_{n+1}(t)$, либо положить $x(t) = \frac{v_{n+1}(t) + u_{n+1}(t)}{2}$. Если $\varepsilon_{n+1}(t) > \varepsilon$ хотя бы для одной точки $t \in [t_0, T]$, то положить $n = n+1$ и перейти к п.2 алгоритма.

З а м е ч а н и е 7.3.

1. Недостатком метода Чаплыгина является возможность появления "небериущихся" интегралов.

2. Если в области Q выполняется условие $\frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2} \leq 0$, то функции $u_n(t)$ и $v_n(t)$ следует поменять местами. Если же функция $\frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2}$ в области Q меняет знак, то применение метода Чаплыгина усложняется, хотя и возможно [10].

Пример 7.24. Методом Чаплыгина построить первое приближение для решения задачи Коши:

$$x' = t + 2x^2, \quad x(0) = 0$$

на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$.

Решение. Поскольку $\frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2} = 4 > 0$, то можно использовать алгоритм.

1. Положим $n=0$. В качестве начальных приближений выберем функции $v_0(t) = t$, $u_0(t) = 0$. Они удовлетворяют условиям (7.12):

$$v_0' - f(t, v_0(t)) = 1 - t - 2t^2 \geq 0, \quad u_0' - f(t, u_0(t)) = 0 - t - 0 \leq 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{2},$$

$$v_0(t_0) = u_0(t_0) = v_0(0) = u_0(0) = x_0 = 0.$$

2. Найдем функции $\sigma_0(t)$ и $\rho_0(t)$. Для этого определим коэффициенты соответствующих дифференциальных уравнений:

$$q_0(t) = \frac{f(t, v_0(t)) - f(t, u_0(t))}{v_0(t) - u_0(t)} = \frac{[1 + 2v_0^2(t)] - [1 + 2u_0^2(t)]}{v_0(t) - u_0(t)} = 2[v_0(t) + u_0(t)] = 2t,$$

$$p_0(t) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=u_0(t)} = 4u_0(t) = 0,$$

$$\psi_0(t) = [v_0'(t) - f(t, v_0(t))] = 1 - t - 2t^2, \quad \varphi_0(t) = -[u_0'(t) - f(t, u_0(t))] = t.$$

Теперь по формулам (7.13) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_0(t) &= e^{\int_0^t q_0(\tau) d\tau} \left\{ \int_0^t \psi_0(\tau) e^{-\int_0^\tau q_0(\xi) d\xi} d\tau \right\} = e^{\int_0^t 2\tau d\tau} \left\{ \int_0^t (1 - \tau - 2\tau^2) e^{-\int_0^\tau 2\xi d\xi} d\tau \right\} = \\ &= e^{t^2} \int_0^t (1 - \tau - 2\tau^2) e^{-\tau^2} d\tau = e^{t^2} \left[\int_0^t e^{-\tau^2} d\tau - \int_0^t \tau e^{-\tau^2} d\tau + \int_0^t \tau d(e^{-\tau^2}) \right] = \\ &= e^{t^2} \left[\int_0^t e^{-\tau^2} d\tau + \frac{1}{2} (e^{-t^2} - 1) + te^{-t^2} - \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau \right] = -\frac{1}{2} e^{t^2} + \frac{1}{2} + t; \end{aligned}$$

$$\rho_0(t) = e^{\int_0^t p_0(\tau) d\tau} \left\{ \int_0^t \varphi_0(\tau) e^{-\int_0^\tau p_0(\xi) d\xi} d\tau \right\} = e^{\int_0^t 0 d\tau} \left\{ \int_0^t \tau e^{-\int_0^\tau 0 d\xi} d\tau \right\} = \int_0^t \tau d\tau = \frac{1}{2} t^2.$$

3. Положим

$$v_1(t) = v_0(t) - \sigma_0(t) = t - \left(-\frac{1}{2} e^{t^2} + \frac{1}{2} + t\right) = \frac{1}{2} e^{t^2} - \frac{1}{2},$$

$$u_1(t) = u_0(t) + \rho_0(t) = 0 + \frac{1}{2} t^2 = \frac{1}{2} t^2.$$

В качестве приближенного решения на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$ возьмем

$$x(t) = \frac{v_1(t) + u_1(t)}{2} = \frac{1}{4} (e^{t^2} - 1 + t^2).$$

Пример 7.25. Методом Чаплыгина решить задачу Коши:

$$x' = 2x, \quad x(0) = 1.$$

Решение. Несмотря на то что легко найти точное решение $x(t) = e^{2t}$ поставленной задачи, решим ее методом Чаплыгина из методических соображений. Поскольку $\frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2} = 0$, то можно использовать алгоритм.

1. Положим $n = 0$; $\varepsilon = 0,1$. В качестве начальных приближений выберем функции $v_0(t) = 1 + 4t$, $u_0(t) = 1$. Они удовлетворяют условиям (7.12):

$$v_0' - f(t, v_0(t)) = 4 - 2v_0(t) = 4 - 2 - 8t \geq 0, \quad u_0' - f(t, u_0(t)) = 0 - 2 \leq 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq 1/4,$$

$$v_0(t_0) = u_0(t_0) = v_0(0) = u_0(0) = x_0 = 1.$$

2. Найдем функции $\sigma_0(t)$ и $\rho_0(t)$. Для этого определим коэффициенты соответствующих дифференциальных уравнений:

$$q_0(t) = \frac{f(t, v_0(t)) - f(t, u_0(t))}{v_0(t) - u_0(t)} = \frac{2 + 8t - 2}{1 + 4t - 1} = 2, \quad p_0(t) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=u_0(t)} = 2,$$

$$\Psi_0(t) = [v_0'(t) - f(t, v_0(t))] = 4 - 2 - 8t = 2 - 8t,$$

$$\Phi_0(t) = -[u_0'(t) - f(t, u_0(t))] = 2u_0(t) = 2.$$

Теперь по формулам (7.13) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_0(t) &= e^{\int_0^t q_0(\tau) d\tau} \left\{ \int_0^t \Psi_0(\tau) e^{-\int_0^\tau q_0(\xi) d\xi} d\tau \right\} = e^{\int_0^t 2 d\tau} \left\{ \int_0^t (2 - 8\tau) e^{-\int_0^\tau 2 d\xi} d\tau \right\} = \\ &= e^{2t} \int_0^t (2 - 8\tau) e^{-2\tau} d\tau = e^{2t} \left\{ (2 - 8\tau) \frac{e^{-2\tau}}{-2} \Big|_0^t - \int_0^t \frac{e^{-2\tau}}{2} 8 d\tau \right\} = \\ &= e^{2t} \left\{ -\frac{2 - 8t}{2} e^{-2t} + 1 - \frac{4}{(-2)} e^{-2\tau} \Big|_0^t \right\} = e^{2t} \left\{ -e^{-2t} + 4t e^{-2t} + 1 + 2e^{-2t} - 2 \right\} = \\ &= 1 + 4t - e^{2t}; \\ \rho_0(t) &= e^{\int_0^t p_0(\tau) d\tau} \left\{ \int_0^t \Phi_0(\tau) e^{-\int_0^\tau p_0(\xi) d\xi} d\tau \right\} = e^{\int_0^t 2 d\tau} \left\{ \int_0^t 2 e^{-\int_0^\tau 2 d\xi} d\tau \right\} = e^{2t} \int_0^t 2 e^{-2\tau} d\tau = \\ &= 2e^{2t} \frac{e^{-2\tau}}{-2} \Big|_0^t = -1 + e^{2t}. \end{aligned}$$

3. Положим

$$v_1(t) = v_0(t) - \sigma_0(t) = 1 + 4t - (1 + 4t - e^{2t}) = e^{2t},$$

$$u_1(t) = u_0(t) + \rho_0(t) = 1 + (-1 + e^{2t}) = e^{2t}.$$

В результате $\epsilon_1(t) = v_1(t) - u_1(t) = 0 < \epsilon = 0,1$. Очевидно, что за одну итерацию метод Чаплыгина для данного уравнения дал точное решение, причем с ним совпала и "нижняя" функция $u_1(t)$ и "верхняя" функция $v_1(t)$.

7.4. Метод Ньютона-Канторовича

Пусть требуется решить задачу Коши:

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

причем функция $f(t, x)$ дважды дифференцируема в области

$$Q = \{ |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b \}.$$

Идея метода Ньютона-Канторовича заключается в поиске последовательности приближений к точному решению посредством нахождения уточнений начального (нулевого) приближения, определяемых решениями некоторых линейных дифференциальных уравнений (вместо исходного нелинейного) [10].

Алгоритм решения задачи Коши методом Ньютона-Канторовича

1. Задать число $\epsilon > 0$ и положить $n = 0$, $x_0(t) = x_0$.
2. Решить задачу Коши:

$$x_{n+1}' - p_n(t) x_{n+1} = q_n(t), \quad x_{n+1}(t_0) = x_0,$$

где

$$p_n(t) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_n(t)}, \quad q_n(t) = f(t, x_n(t)) - \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_n(t)} x_n(t).$$

Для нахождения решения этого уравнения можно использовать формулу, которая является следствием равенства (2.25):

$$x_{n+1}(t) = e^{\int_{t_0}^t p_n(\tau) d\tau} \left\{ x_0 + \int_{t_0}^t q_n(\tau) e^{-\int_{t_0}^{\tau} p_n(\xi) d\xi} d\tau \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.14)$$

3. Если $\max_{|t-t_0| \leq a} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| < \epsilon$, процесс завершить и положить $x(t) = x_{n+1}(t)$. В противном случае положить $n = n + 1$ и перейти к п.2 алгоритма.

З а м е ч а н и е 7.4. Можно доказать [10], что если $x_n(t) \in Q$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$ при $|t - t_0| \leq h$, где h - достаточно мало.

Пример 7.26. Методом Ньютона-Канторовича найти первое приближение решения задачи Коши:

$$x' = t^2 + x^2, \quad x(0) = 2.$$

- Решение.** 1. Положим $n = 0$, $x_0(t) = x_0 = x(0) = 2$.
2. Поскольку $t_0 = 0$,

$$p_0(t) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0(t)} = 2x_0(t) = 4,$$

$$q_0(t) = f(t, x_0(t)) - \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0(t)} x_0(t) = t^2 + x_0^2(t) - 2x_0^2(t) = t^2 - 4,$$

то по формуле (7.14) получаем

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\int_0^t p_0(\tau) d\tau} \left\{ x_0 + \int_0^t q_0(\tau) e^{-\int_0^\tau p_0(\xi) d\xi} d\tau \right\} = e^{\int_0^t 4 d\tau} \left\{ 2 + \int_0^t (\tau^2 - 4) e^{-\int_0^\tau 4 d\xi} d\tau \right\} = \\ &= e^{4t} \left\{ 2 + \int_0^t (\tau^2 - 4) e^{-4\tau} d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Полученный интеграл вычислим "по частям", обозначив

$$u = \tau^2 - 4, \quad dv = e^{-4\tau} d\tau.$$

Тогда $du = 2\tau d\tau$, $v = -\frac{1}{4}e^{-4\tau}$ и, таким образом,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{4t} \left\{ 2 + (\tau^2 - 4)(-\frac{1}{4}e^{-4\tau}) \Big|_0^t + \frac{1}{4} \int_0^t 2\tau e^{-4\tau} d\tau \right\} = \\ &= \left| u = 2\tau, \quad dv = e^{-4\tau} d\tau, \quad du = 2 d\tau, \quad v = -\frac{1}{4}e^{-4\tau} \right| = \\ &= e^{4t} \left\{ 2 - \frac{\tau^2 - 4}{4} e^{-4\tau} - 1 + \frac{1}{4} 2\tau (-\frac{1}{4}e^{-4\tau}) \Big|_0^t + \frac{1}{4} \int_0^t 2e^{-4\tau} d\tau \right\} = \\ &= e^{4t} \left\{ 1 - \frac{t^2}{4} e^{-4t} + e^{-4t} - \frac{te^{-4t}}{8} - \frac{1}{8} e^{-4t} + \frac{1}{8} \right\} = \frac{9}{8} e^{4t} + \frac{7}{8} - \frac{1}{8} t - \frac{1}{4} t^2. \end{aligned}$$

3. Оценим близость первого приближения и сравним полученное решение с результатами примеров 7.8 и 7.19. Для этого представим функцию e^{4t} в виде разложения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{9}{8} \left(1 + 4t + \frac{16}{2} t^2 + \frac{64}{6} t^3 + \dots \right) + \frac{7}{8} - \frac{1}{8} t - \frac{1}{4} t^2 = \\ &= 2 + \frac{35}{8} t + \frac{35}{4} t^2 + 12t^3 + \dots \end{aligned}$$

Первый член в приближенных решениях одинаков во всех примерах, а второй и третий несколько отличаются. Для получения более точного результата следует продолжать процесс последовательных приближений.

7.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Решить задачи Коши (найти первые три члена разложения решения в ряд Тейлора):

а) $x' = 2tx$, $x(1) = 1$;

б) $x' = -\frac{x}{t}$, $x(2) = 2$.

Ответ: а) $x(t) = 1 + 2(t-1) + 3(t-1)^2 + \dots$; б) $x(t) = 2 - (t-2) + \frac{1}{2}(t-2)^2 + \dots$

2. Решить задачи Коши:

а) $x'' = xx' - t^2$, $x(0) = x'(0) = 1$;

б) $x' = t^2 x^2 - 1$, $x(0) = 1$;

в) $x' = e^x + tx$, $x(0) = 0$.

Ответ: а) $x(t) = 1 + t + \frac{1}{2!} t^2 + \frac{2}{3!} t^3 + \frac{3}{4!} t^4 + \frac{14}{5!} t^5 + \dots$;

б) $x(t) = 1 - t + \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^4 + \frac{1}{5} t^5 + \dots$;

в) $x(t) = t + \frac{1}{2} t^2 + \frac{2}{3} t^3 + \frac{11}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 + \dots$

3. Решить задачи Коши:

а) $x'' + tx' + x = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$;

б) $x'' - tx' + x = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$.

Ответ: а) $x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} t^{2n} = 1 - e^{-1/2} t^2$;

б) $x(t) = \frac{1}{2} t^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!} t^{2n+2}$.

У к а з а н и е: полное решение приведено в [31].

4. Найти первые пять членов разложения в степенной ряд решения задачи Коши:

а) $x' = 2 \cos t - tx^2$, $x(0) = 1$;

б) $x'' = -2tx$, $x(0) = x'(0) = 1$;

в) $x'' = x \cos t + x$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

Ответ: а) $x(t) = 1 + 2t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{3}t^3 - \frac{3}{4}t^4 + \dots$;

б) $x(t) = 1 + t - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{45}t^6 + \dots$;

в) $x(t) = 1 + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{5}{6!}t^6 + \dots$

5. Найти четыре первых отличных от нуля члена разложения решения задачи Коши:

$$x' = t^2 x + x^3, \quad x(0) = 1.$$

Ответ: $x(t) = 1 + \frac{1}{1!}t + \frac{3}{2!}t^2 + \frac{17}{3!}t^3 + \dots$

6. Решить задачу Коши:

а) $x' = 2t - x$, $x(0) = 2$;

б) $x' = x^2 + t$, $x(0) = 1$;

в) $x'' = (2t - 1)x - 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

Ответ: а) $x(t) = 4(1 - \frac{1}{1!}t + \frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 - \dots) + 2(t - 1) = 4e^{-t} + 2(t - 1)$;

б) $x(t) = 1 + t + \frac{3}{2!}t^2 + \frac{8}{3!}t^3 + \frac{34}{4!}t^4 + \dots$;

в) $x(t) = t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{5}{24}t^4 - \frac{1}{24}t^5 - \dots$

Заключение к части 1

Все рассмотренные в первой части методы относятся к так называемым аналитическим методам, поскольку их применение в конечном итоге должно привести к решению уравнения (или системы уравнений), записанного в точной аналитической форме. Самыми важными и наиболее часто встречающимися в приложениях являются линейные дифференциальные уравнения n -го порядка и системы уравнений первого порядка. Рассмотренные методы позволяют получить решение в окончательном виде и проанализировать его качественно.

Важным в практической деятельности оказывается также и умение решать нелинейные уравнения, поэтому подробное изложение известных аналитических методов решения нелинейных уравнений является не только данью традициям. Владение этими методами - фундамент знаний хорошего специалиста в области анализа и синтеза динамических систем.

Подтверждением практической значимости дифференциальных уравнений и систем следует считать большое количество приведенных примеров. Эти примеры показывают, что аппарат дифференциальных уравнений широко используется для построения математических моделей в самых различных областях: физике, механике, биологии, экономике. Особенно большое значение он имеет для решения разнообразных задач анализа динамических систем, в частности задач анализа выходных процессов и устойчивости. При этом теория дифференциальных уравнений не только является инструментом для решения различных задач, но и сама оказывается зачастую объектом влияния со стороны смежных дисциплин, например теории регулирования и управления, теории фильтрации и др. Особо выделим в связи с этим значимость уравнения Риккати. Оно выделено в особый раздел и изучено наиболее подробно в силу его практической важности, прежде всего в задачах синтеза фильтров и линейных регуляторов для линейных и нелинейных динамических систем.

Несмотря на большое число разнообразных примеров, приведенных в первой части, оказывается, что аналитические методы могут применяться лишь к достаточно ограниченному классу задач теории дифференциальных уравнений. Естественным развитием и дополнением аналитических подходов являются приближенно-аналитические методы, рассмотренные в разд.7. Эти методы сохраняют в себе основные черты аналитических подходов, но при этом расширяют их новой концепцией проведения приближенных расчетов: в тех случаях, когда точное решение установить не удастся, часто оказывается возможным получить достаточно точное приближение для него. Поскольку это приближенное решение представляется в некоторой аналитической форме (например, в виде ряда), то дальнейшим естественным развитием теории дифференциальных уравнений являются просто приближенные методы, позволяющие получать приближенные решения в табличной форме. Методы теории приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем рассматриваются в следующей части. Они, несомненно, имеют большую практическую значимость по сравнению с аналитическими методами. Однако заметим еще раз, что фундаментом всей теории дифференциальных уравнений, в том числе и методов приближенного решения, являются классические аналитические методы.

Все рассмотренные в настоящем пособии аналитические методы можно классифицировать следующим образом.



Часть 2. Численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений

8. Принципы построения, устойчивость и точность численных методов

Дана задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, записанной в векторной форме:

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X), \quad X(t_0) = X_0, \quad (8.1)$$

где $X = (x_1, \dots, x_n)^T$, $X_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})^T$, $F(t, X) = (f_1(t, X), \dots, f_n(t, X))^T$.

Требуется найти решение $X(t)$ задачи Коши. Численные методы решения задачи (8.1) позволяют найти искомую функцию $X(t)$ лишь приближенно в отличие от методов решения, рассмотренных ранее. Но при этом численные методы дают возможность приближенно решать многие из задач, точные решения которых аналитическими методами найдены быть не могут.

1. Численное решение задачи (8.1) ищется на интервале $[t_0, T]$, левый конец которого t_0 задан, а правый конец T может быть либо задан, либо определен в процессе расчетов некоторым условием.

2. Искомое приближенное решение ищется в отдельных точках $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ интервала, называемых узлами сетки, в виде последовательности векторов $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$, приближенно равных векторам $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k), \dots$, определяемым точным решением $X(t)$ (рис.8.1).

3. Расстояние между соседними узлами называется *шагом интегрирования* h : $h = t_{k+1} - t_k$. Шаг может быть задан заранее (интегрирование с постоянным шагом) или может меняться в ходе вычислений. Чаще всего

$$t_k = t_0 + kh, \quad k = 0, 1, \dots, N; \quad h = \frac{T - t_0}{N}. \quad (8.2)$$

4. Принципы построения и классификация численных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Точка X_{k+1} , определяемая на $(k+1)$ -й итерации, может вычисляться явно:

$$X_{k+1} = \Phi(t_k, t_{k-1}, \dots, t_{k-m+1}, X_k, X_{k-1}, \dots, X_{k-m+1}), \quad (8.3)$$

где $\Phi(\cdot)$ - некоторая функция, зависящая от конкретного алгоритма (кроме последней рассчитанной точки (t_k, X_k) используются еще $(m-1)$ предыдущих точек), или неявно:

$$X_{k+1} = \Phi(t_{k+1}, t_k, \dots, t_{k-m+1}, X_{k+1}, X_k, \dots, X_{k-m+1}), \quad (8.4)$$

где искомая величина X_{k+1} входит одновременно и в левую, и в правую часть. Соответственно численные методы делятся на *явные* и *неявные*.

Методы делятся также на *одношаговые* и *m-шаговые*. В одношаговых методах для расчета точки (t_{k+1}, X_{k+1}) требуется информация только о последней рассчитанной точке (t_k, X_k) . В *m-шаговых* методах для нахождения точки (t_{k+1}, X_{k+1}) требуется информация о *m* предыдущих точках.

3. *Локальная ошибка* численного метода на *k*-й итерации определяется выражением

$$\varepsilon_{k+1}(h) = X_{k+1} - X(t_{k+1}), \quad k = 0, \dots, N-1,$$

где $X(t_{k+1})$ - точное решение при $t = t_{k+1}$, X_{k+1} - приближенное решение, получаемое по формулам (8.3) или (8.4), при условии, что вместо приближенных значений $X_k, X_{k-1}, \dots, X_{k-m+1}$ используются значения, соответствующие точному решению, то есть $X(t_k), X(t_{k-1}), \dots, X(t_{k-m+1})$.

6. *Глобальная ошибка* численного метода определяется выражением

$$e_N(h) = X_N - X(t_N).$$

Локальные ошибки "переносятся" в точку t_N и складываются. На первой итерации $X_1 - X(t_1) = e_1^O + e_1^M$, где e_1^O - *ошибка округления*, обусловленная числом разрядов ЦВМ и зависящая от числа операций, выполняемых для нахождения следующей точки приближенного решения, e_1^M - *методическая ошибка*, обусловленная погрешностью выбранного алгоритма.

На второй итерации (то же будет на *k*-й итерации):

$$X_2 - X(t_2) = e_2^O + e_2^M + e_2^H,$$

где e_2^H - *переходная ошибка*, обусловленная тем, что при расчете точки X_2 вместо $X(t_1)$ берется приближенное значение X_1 , полученное на предыдущей итерации (рис.8.2). Переходная ошибка может иметь противоположный знак относительно других составляющих ошибки, что может привести к их компенсации.

На практике в качестве характеристики точности метода по каждой координате используется величина

$$e_i(h) = \max_{0 \leq k \leq N} |x_i^k - x_i(t_k)|, \quad i = 1, \dots, n.$$

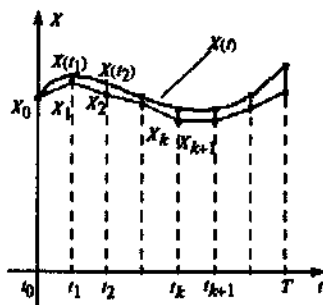


Рис.8.1

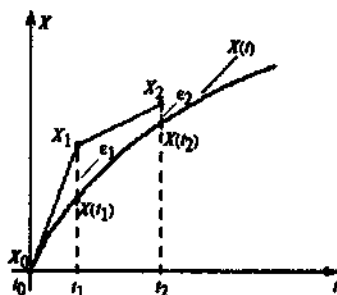


Рис.8.2

7. Порядок численного метода. Пусть $\varepsilon_M(h)$ - некоторая функция переменной h с конечной областью определения D на полуоси $h > 0$, причем h может принимать сколь угодно малые значения. Тогда, если существуют такие положительные числа h_0 , C , p , что при всех $h \in D$, удовлетворяющих условию $0 < h \leq h_0$, выполняется неравенство

$$|\varepsilon_M(h)| \leq Ch^p, \quad (8.5)$$

то пишут $\varepsilon_M(h) = O(h^p)$ и говорят, что функция $\varepsilon_M(h)$ есть O большее от h^p .

Число p называется *порядком* численного метода, если его глобальная ошибка есть O большее от h^p .

Можно показать [45-47], что если локальная ошибка имеет порядок $(p+1)$, то есть $\varepsilon_k(h) = O(h^{p+1})$, то глобальная ошибка имеет на единицу меньший порядок, то есть $\varepsilon_M(h) = O(h^p)$.

8. Устойчивость численных методов. Явление числовой неустойчивости связано с тем, что в течение каждой последующей итерации ошибка интегрирования неуклонно растёт.

Устойчивость численных методов проверяется на "тестовом примере":

$$x' = \lambda x, \quad x(0) = 1, \quad (8.6)$$

где λ - в общем случае комплексная константа. Уравнение (8.6) является простейшим, и любой метод, не пригодный для его решения, не представляет интереса. Линейность уравнения позволяет получить значимые критерии устойчивости в явной форме.

Метод называется *устойчивым (ограниченно устойчивым)*, если существует такое число $h_{кр} > 0$, что при использовании метода для решения задачи (8.6), где $\text{Re } \lambda < 0$, с шагом $0 < h < h_{кр}$ при $t_k = t_0 + kh \rightarrow \infty$ глобальная ошибка ограничена. Величина $h_{кр}$ называется *критическим шагом*. Если $h > h_{кр}$, глобальная ошибка может неограниченно возрастать.

Метод называется *A-устойчивым*, если при его применении все численные решения уравнения (8.6) с фиксированным положительным шагом h и комплексной константой λ с $\text{Re } \lambda < 0$ стремятся к нулю при $t_k = t_0 + kh \rightarrow \infty$.

Область A-устойчивости - это совокупность значений h и λ , удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}(h\lambda) < 0$ (рис.8.3). Выполнение свойства A-устойчивости является весьма желательным, так как если решение уравнения (8.6) асимптотически устойчиво (в силу условия $\operatorname{Re} \lambda < 0$ корень характеристического уравнения находится в левой полуплоскости), то погрешность численного решения стремится к нулю при любой величине шага $h > 0$. Выбор шага определяется желаемой точностью расчетов.

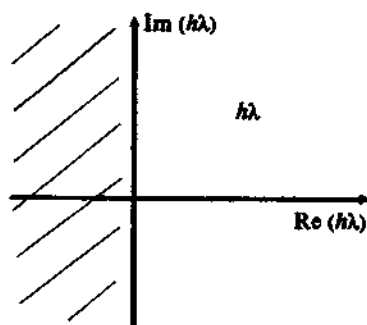


Рис.8.3

Замечание 8.1.

1. Для исследования устойчивости численного метода следует использовать соответствующую разностную схему (8.3) или (8.4) для решения уравнения (8.6) и привести ее к линейному разностному уравнению. Известно, что критерием устойчивости решения линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_n x(k+n) + a_{n-1} x(k+n-1) + \dots + a_0 x(k) = g(k), \quad k=0,1,\dots$$

является требование расположения корней λ_i соответствующего характеристического уравнения $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат, то есть $|\lambda_i| < 1, i=1,\dots,n$. Это условие позволяет указать область устойчивости численного метода.

2. Для ограниченно устойчивых методов важной задачей является нахождение величины критического шага. Если константа λ в уравнении (8.6) действительная, то можно найти *интервал устойчивости*.

3. Существуют определения, смягчающие требование A-устойчивости, например $A(\alpha)$ -, $A(0)$ -устойчивости и другие [45, 46].

9. Жесткость систем дифференциальных уравнений. Аппроксимируем систему (8.1) в некоторой окрестности точного решения $X(t)$ линеаризованной системой [4,22]:

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X(t)) + J(t) [X - X(t)], \quad (8.7)$$

где $J(t)$ - матрица Якоби, составленная из вычисленных в точке $(t, X(t))$ частных производных $\frac{\partial F}{\partial X}$. Если изменение $J(t)$ на некотором промежутке $[t_0, T]$ достаточно мало, то локальные фундаментальные решения системы (8.7) приближенно равны $e^{\lambda_i t}$, где $\lambda_i = \lambda_i(t)$ - локальные собственные значения (они считаются различными) матрицы Якоби $J(t)$. Будем предполагать, что система локально устойчива, так что $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, i=1,\dots,n$, и фундаменталь-

ные решения затухают с ростом t со скоростью, пропорциональной величине $\frac{1}{\operatorname{Re}(-\lambda_0)}$, которая называется *постоянной времени*.

Задача Коши (8.1) называется *жесткой* на промежутке $[t_0, T]$, если для всех $t \in [t_0, T]$ выполнено:

$$\begin{aligned} \text{а) } \operatorname{Re}(\lambda_0) < 0, \quad i = 1, \dots, n; \\ \text{б) } S(t) = \frac{\max \operatorname{Re}(-\lambda_0)}{\min \operatorname{Re}(-\lambda_0)} \gg 1. \end{aligned}$$

На практике задачу можно считать жесткой, если $S(t)$ является величиной $O(10)$, однако в некоторых прикладных областях, например в теории электрических цепей и химической кинетике, коэффициент жесткости $S(t)$ может достигать величины $O(10^8)$.

Пример 8.1. Найти коэффициент жесткости системы:

$$\begin{cases} x' = 998x + 1998y, & x(0) = 1, \\ y' = -999x - 1999y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Решение. Собственные значения матрицы коэффициентов $\begin{pmatrix} 998 & 1998 \\ -999 & -1999 \end{pmatrix}$

равны $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1000$. Поскольку $\operatorname{Re}(\lambda_1) < 0$, $\operatorname{Re}(\lambda_2) < 0$, $S(t) = 10^3 \gg 1$, то система жесткая. Ее точное решение имеет вид

$$x(t) = 4e^{-t} - 3e^{-1000t}, \quad y(t) = -2e^{-t} + 3e^{-1000t}.$$

Казалось бы, что численное интегрирование заданной системы можно было бы вести сначала с малым шагом h , а затем, когда компонента e^{-1000t} станет малой, увеличить шаг. На самом деле это не так. Компонента решения e^{-1000t} заставляет вести интегрирование с малым шагом на всем промежутке $[t_0, T]$. Шаг определяется наименьшей постоянной времени (см. разд.9.1). Это и означает, что система жесткая.

Пример 8.2. Найти коэффициент жесткости системы:

$$\begin{cases} x' = -2x - 998y, & x(0) = 2, \\ y' = -1000y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Решение. Собственные значения матрицы коэффициентов $\begin{pmatrix} -2 & -998 \\ 0 & -1000 \end{pmatrix}$

равны $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1000$. Таким образом, коэффициент жесткости $S(t) = \frac{1000}{2} = 500$. Поскольку $\operatorname{Re}(\lambda_1) < 0$, $\operatorname{Re}(\lambda_2) < 0$ и $S(t) \gg 1$, то система является жесткой.

9. Явные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений

9.1. Явный метод Эйлера

Для получения приближенного решения системы дифференциальных уравнений заменим в (8.1) производную простейшей конечно-разностной формулой

$$\left. \frac{dX}{dt} \right|_{t=t_k} = \frac{X_{k+1} - X_k}{t_{k+1} - t_k} = \frac{X_{k+1} - X_k}{h} = F(t_k, X_k).$$

Тогда

$$X_{k+1} = X_k + hF(t_k, X_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (9.1)$$

Соотношение (9.1) представляет собой алгоритм приближенного решения системы (8.1), называемый *явным методом Эйлера*.

Известно [1], что явный метод Эйлера является ограниченно устойчивым, то есть существует критический шаг $h_{кр} = C\tau_{min}$, где τ_{min} - минимальная постоянная времени (см. (B.9), (B.10), в которых $\tau_{min} = T$ - постоянная времени электрической цепи), а $C = 2$. Метод имеет первый порядок точности относительно шага h : $\varepsilon_i(h) = O(h)$, $i = 1, \dots, n$.

Пример 9.1. Приближенно решить дифференциальное уравнение:

$$x' = -1/x$$

на отрезке $[-1, 3]$ с начальным условием $x(-1) = 0,21$ и шагом $h = 0,1$.

Решение. Заметим, что условие существования решения данного уравнения (см. теорему 1.1) нарушается при приближении x к нулю, а именно правая часть $f(t, x) = -1/x$ является разрывной функцией в точках оси $x = 0$. При численном решении этого уравнения необходимо, вообще говоря, на каждом шаге проверять условие существования решения $x \neq 0$ и в случае его нарушения прекратить интегрирование и указать полученный интервал существования.

Рассматриваемое уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому его решение, удовлетворяющее заданному начальному условию, можно получить непосредственно (см. разд.2.1), а именно $x(t) = \sqrt{1,0441 - t^2}$. Анализ последнего выражения позволяет сделать вывод, что решение рассматриваемой задачи существует для $|t| < \sqrt{1,0441}$, то есть искомый интервал существования $[-1,0219; 1,0219]$. Явный метод Эйлера в данной задаче позволяет указать приближенное решение на интервале $[-1, 1]$, так как шаг $h = 0,1$.

Формула метода Эйлера получается из (9.1):

$$X_{k+1} = X_k + h \left(-\frac{t_k}{X_k} \right) = X_k - \frac{0,1 t_k}{X_k}, \quad t_k = t_{k-1} + h, \quad k = 1, 2, \dots, 20, \quad t_0 = -1, \quad X_0 = 0,21.$$

Таблица 9.1

t_k	X_k	$x(t_k)$
-1,0	0,210	0,210
-0,9	0,686	0,484
-0,8	0,871	0,636
-0,7	0,915	0,744
-0,6	0,992	0,827
-0,5	1,052	0,891
-0,4	1,100	0,940
-0,3	1,136	0,977
-0,2	1,163	1,000
-0,1	1,180	1,027
0,0	1,188	1,022
0,1	1,188	1,012
0,2	1,180	1,002
0,3	1,163	0,977
0,4	1,137	0,940
0,5	1,102	0,891
0,6	1,056	0,827
0,7	1,000	0,744
0,8	0,930	0,636
0,9	0,844	0,484
1,0	0,737	0,210
1,1	0,601	
1,2	0,418	
1,3	0,131	
1,4	-0,859	
1,5	-0,696	
1,6	-0,480	
1,7	-0,146	
1,8	1,014	
1,9	0,837	
2,0	0,609	

Результаты расчетов, выполненных в соответствии с полученными соотношениями, приведены в табл.9.1. На рис.9.1 изображено полученное приближенное решение и точное решение, а пунктирной линией показана кривая, которая получается при продолжении численного решения задачи без проверки условия существования (решением не является!).

Отметим, что точность приближенного решения существенно снижается при приближении к оси $x = 0$.

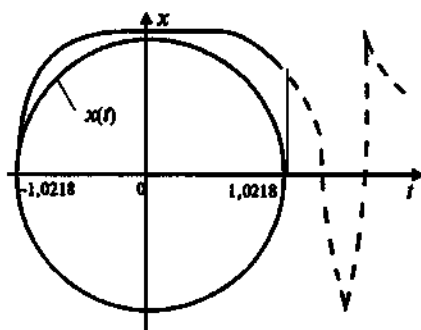


Рис.9.1

Пример 9.2. Приблизительно решить дифференциальное уравнение:

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = E, \quad E = 1; \quad RC = 0,1$$

на отрезке $[0,1]$ с начальным условием $u_c(0) = 0$ и шагами $h = 0,05$; $h = 0,2$; $h = 0,5$.

Решение. Данное уравнение является линейным, так что решение поставленной задачи существует. Кроме того, в примере 3.19 найдено точное решение данной задачи:

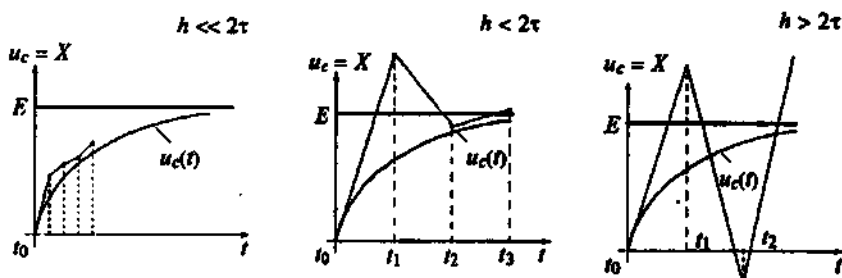


Рис. 9.2

Таблица 9.2

t_k	X_k при $h = 0,05$	X_k при $h = 0,2$	X_k при $h = 0,5$	$x(t_k)$
0,00	0,000000	0,000	0,000	0,000000
0,05	0,500000			0,393469
0,10	0,750000			0,632121
0,15	0,875000			0,776870
0,20	0,937500	2,000		0,864665
0,25	0,968750			0,917915
0,30	0,984375			0,950213
0,35	0,992187			0,969803
0,40	0,996094	0,000		0,981684
0,45	0,998047			0,988891
0,50	0,999023		5,000	0,993262
0,55	0,999511			0,995913
0,60	0,999755	2,000		0,997521
0,65	0,999877			0,998497
0,70	0,999938			0,999088
0,75	0,999969			0,999446
0,80	0,999984	0,000		0,999665
0,85	0,999992			0,999797
0,90	0,999996			0,999877
0,95	0,999998			0,999925
1,00	0,999999	2,000	-15,00	0,999955
$\max \varepsilon_i(h)$	0,117879	1,135335	15,99995	

$u_c = E(1 - e^{-t/RC}) = 1 - e^{-10t}$. Поскольку для рассматриваемого уравнения $\tau_{min} = T = RC = 0,1$ (это следует из сравнения с уравнением (В.9)), то есть $h_{кр} = 0,2$, то для $h = 0,05$ метод Эйлера является устойчивым, для $h = 0,2$ - находится на границе устойчивости, а для $h = 0,5$ - является неустойчивым.

Перепишав уравнение в виде $\frac{du_c}{dt} = 10 - 10u_c$, получим из (9.1) формулу для нахождения приближенного решения:

$$X_{k+1} = X_k + h(10 - 10X_k) = 10h + (1-10h)X_k.$$

Результаты расчетов, проведенных для разных значений h , даны в табл.9.2. Отметим, что при $h = 0,05$ приближенное решение достаточно близко к точному, при $0,05 < h < 0,2$ точность приближенного решения значительно снижается, но "пила" сходится, при $h = 0,2$ "пила" не сходится и не расходится, а при $h > 0,2$ (например, при $h = 0,5$) "пила", аппроксимирующая точное решение, расходится. На рис.9.2 схематично изображены типовые кривые, соответствующие различным вариантам расчетов.

9.2. Метод Эйлера-Коши

Для конечно-разностной аппроксимации производной в системе (8.1) воспользуемся следующей формулой:

$$\left. \frac{dX}{dt} \right|_{t=t_k} = \frac{X_{k+1} - X_{k-1}}{2h} = F(t_k, X_k).$$

Тогда

$$X_{k+1} = X_{k-1} + 2h F(t_k, X_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (9.2)$$

Соотношение (9.2) представляет собой алгоритм приближенного решения системы (8.1), называемый *методом Эйлера-Коши*.

Для начала расчетов необходимы две "разгонные" точки: кроме известной точки X_0 требуется знать еще точку X_1 . Она может быть найдена, например, с помощью явного метода Эйлера. Метод имеет второй порядок точности относительно шага h : $e_i(h) = O(h^2)$, $i = 1, \dots, n$.

9.3. Модифицированный метод Эйлера

Формулы для вычисления приближенного решения системы *модифицированным методом Эйлера* на $(k+1)$ -м шаге имеют вид

$$X_{k+1/2} = X_k + \frac{h}{2} F(t_k, X_k), \quad X_{k+1} = X_k + h F(t_k + \frac{h}{2}, X_{k+1/2}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (9.3)$$

Метод имеет второй порядок точности относительно шага h : $e_i(h) = O(h^2)$, $i = 1, \dots, n$.

9.4. Метод предсказания и коррекции

Метод предсказания и коррекции состоит из двух взаимосвязанных этапов.

1. Предсказание. Находится приближенное значение $\tilde{X}_{k+1}$ точки $X(t_{k+1})$ явным методом Эйлера:

$$\tilde{X}_{k+1} = X_k + h F(t_k, X_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (9.4)$$

2. Коррекция. Точка $\tilde{X}_{k+1}$ уточняется (корректируется) по формуле

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{2} h [F(t_k, X_k) + F(t_{k+1}, \tilde{X}_{k+1})], \quad k = 0, 1, \dots \quad (9.5)$$

Метод имеет второй порядок точности относительно шага h : $\varepsilon_i(h) = O(h^2)$, $i = 1, \dots, n$.

9.5. Явные методы Рунге-Кутты

Формула для вычисления X_{k+1} методом Рунге-Кутты четвертого порядка имеет следующий вид:

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{6} h (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (9.6)$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 - угловые коэффициенты касательных к графику решения в различных точках, вычисляемые по формулам

$$\begin{aligned} k_1 &= F(t_k, X_k), \quad k_2 = F(t_k + \frac{h}{2}, X_k + k_1 \frac{h}{2}), \\ k_3 &= F(t_k + \frac{h}{2}, X_k + k_2 \frac{h}{2}), \quad k_4 = F(t_k + h, X_k + k_3 h). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Метод имеет четвертый порядок точности относительно шага h : $\varepsilon_i(h) = O(h^4)$, $i = 1, \dots, n$.

Метод Рунге-Кутты, как и методы Эйлера, является одношаговым, так как значение X_{k+1} вычисляется на основе текущего значения X_k . Кроме того, этот метод ограниченно устойчив [1], а именно $h_{кр} = 2,78 \tau_{min}$. По сравнению с явным методом Эйлера здесь на одной итерации требуется вычислять значение правой части системы (8.1) четыре раза. Как и явный метод Эйлера, метод Рунге-Кутты не требует дополнительных разгонных точек, что позволяет легко менять шаг в процессе вычислений. Для повышения устойчивости ограниченно устойчивых методов могут использоваться серии шагов разной величины. Например, в двухшаговой серии первый шаг h_1 может быть большим, а второй h_2 - малым и так далее. При таком подходе неустойчивость, если она возникает на первом шаге, уменьшается на втором, а средний шаг превышает $h_{кр}$.

В методе Рунге-Кутты пятого порядка точности для расчета точки X_{k+1} используются следующие соотношения [31]:

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{6} h (k_1 + 4k_3 + k_5), \quad (9.8)$$

где $k_1 = F(t_k, X_k)$, $k_2 = F(t_k + \frac{h}{2}, X_k + k_1 \frac{h}{2})$, $k_3 = F(t_k + \frac{h}{2}, X_k + \frac{h}{4}(k_1 + k_2))$,

$$k_4 = F(t_k + h, X_k - h k_2 + 2h k_3), \quad k_5 = F(t_k + \frac{2h}{3}, X_k + \frac{h}{27}(7k_1 + 10k_2 + k_4)),$$

$$k_6 = F(t_k + \frac{h}{5}, X_k + \frac{h}{625}(28k_1 - 125k_2 + 546k_3 + 54k_4 - 378k_5)).$$

Методы Рунге-Кутты повышенного порядка

В общем случае методы Рунге-Кутты описываются набором соотношений следующей структуры:

$$\begin{aligned} k_1 &= F(t_k, X_k), \\ k_2 &= F(t_k + c_2 h, X_k + h a_{2,1} k_1), \\ k_3 &= F(t_k + c_3 h, X_k + h(a_{3,1} k_1 + a_{3,2} k_2)), \\ &\dots \\ k_s &= F(t_k + c_s h, X_k + h(a_{s,1} k_1 + \dots + a_{s,s-1} k_{s-1})), \end{aligned} \quad (9.9)$$

$$X_{k+1} = X_k + h(b_1 k_1 + \dots + b_s k_s),$$

$$\tilde{X}_{k+1} = X_k + h(\tilde{b}_1 k_1 + \dots + \tilde{b}_s k_s),$$

где s - число стадий (этапов); $k_1, \dots, k_s$ - значения, вычисленные на основе правой части системы (8.1); $c_1, \dots, c_s$; a_{lm} , $l = 2, \dots, s$; $m = 1, \dots, s-1$; $b_1, \dots, b_s$ - коэффициенты схемы Рунге-Кутты.

Многие из описываемых схем включают также соотношение для нахождения приближения $\tilde{X}_{k+1}$, порядок точности которого, как правило, на единицу больше или меньше порядка, обеспечиваемого с помощью X_{k+1} . Величина $\|X_{k+1} - \tilde{X}_{k+1}\|$ служит для учета погрешности и управления величиной шага. Коэффициенты семейства методов Рунге-Кутты (9.9) удобно записывать в виде табл. 9.3. Например, табл. 9.4 соответствует классическому методу Рунге-Кутты четвертого порядка (9.6), а в табл. 9.5 приведены коэффициенты более точного метода четвертого порядка (правило $\frac{1}{6}$).

Таблица 9.3

0				
c_2	$a_{2,1}$			
c_3	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$		
...				
c_s	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$	...	$a_{s,s-1}$
X_{k+1}	b_1	b_2	...	b_s
$\tilde{X}_{k+1}$	$\tilde{b}_1$	$\tilde{b}_2$	...	$\tilde{b}_s$

Таблица 9.4

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
X_{k+1}	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Таблица 9.5

0				
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$			
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1		
1	1	-1	1	
X_{k+1}	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Табл.9.6 соответствует методу Рунге-Кутты второго порядка, табл.9.7 и табл.9.8 - методам третьего порядка.

Таблица 9.6

0	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
X_{k+1}	0 1

Таблица 9.7

0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
1	-1	2	
X_{k+1}	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Таблица 9.8

0			
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	
X_{k+1}	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$

В табл.9.9 даны коэффициенты *метода Фельберга четвертого порядка* (см. разд.9.8), где формула для $\tilde{X}_{k+1}$ имеет пятый порядок, а в табл.9.10 - *семистадийного метода Батчера шестого порядка*. В табл.9.11 приведены коэффициенты *метода Рунге-Кутты-Мерсона четвертого порядка* (см. разд.9.6), где формула для $\tilde{X}_{k+1}$ имеет пятый порядок для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и третий порядок для нелинейных систем.

Таблица 9.9

0						
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$					
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$				
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$			
1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$	
X_{k+1}	$\frac{25}{216}$	0	$\frac{1408}{2565}$	$\frac{2197}{4104}$	$-\frac{1}{5}$	0
$\tilde{X}_{k+1}$	$\frac{16}{135}$	0	$\frac{6656}{12825}$	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{9}{50}$	$\frac{2}{55}$

Таблица 9.10

0						
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$				
$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{12}$			
$\frac{5}{6}$	$-\frac{35}{144}$	$-\frac{55}{36}$	$\frac{35}{48}$	$\frac{15}{8}$		
$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{360}$	$-\frac{11}{36}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	
1	$-\frac{41}{260}$	$\frac{22}{13}$	$\frac{43}{156}$	$-\frac{118}{39}$	$\frac{32}{195}$	$\frac{80}{39}$
X_{k+1}	$\frac{13}{200}$	0	$\frac{11}{40}$	$\frac{11}{40}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{13}{200}$

Таблица 9.11

0					
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$				
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$		
1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	2	
X_{k+1}	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
$\bar{X}_{k+1}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

Параметры метода Рунге-Кутты-Дормана-Прайса пятого порядка приведены в табл.9.12. Метод Фельберга седьмого порядка и метод Дормана-Прайса восьмого порядка изложены, например, в [46].

Таблица 9.12

0							
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$						
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$					
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$				
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$			
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$		
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	
X_{k+1}	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0
$\tilde{X}_{k+1}$	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$

З а м е ч а н и е 9.1. Для s -стадийных методов семейства Рунге-Кутты справедливо следующее условие устойчивости, определяемое для решения задачи (8.6):

$$\left| 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2!} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \frac{(h\lambda)^4}{4!} + \dots + \frac{(h\lambda)^s}{s!} \right| < 1.$$

Если λ - действительное число, можно указать интервалы устойчивости метода: $h\lambda \in (-2; 0)$ при $s = 1, 2$; $h\lambda \in (-2,51; 0)$ при $s = 3$; $h\lambda \in (-2,78; 0)$ при $s = 4$ и так далее.

9.6. Метод Рунге-Кутты-Мерсона

Отличие этого метода от классического метода Рунге-Кутты четвертого порядка состоит в том, что шаг интегрирования вычисляется автоматически в зависимости от текущей точности.

Алгоритм приближенного решения системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты-Мерсона

1. Задаются погрешность ε и начальный шаг интегрирования h .
2. Для расчета точки X_{k+1} используется формула

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{6} h (k_1 + 4k_4 + k_5), \quad (9.10)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= F(t_k, X_k), \quad k_2 = F\left(t_k + \frac{h}{3}, X_k + k_1 \frac{h}{3}\right), \\ k_3 &= F\left(t_k + \frac{h}{3}, X_k + k_1 \frac{h}{6} + k_2 \frac{h}{6}\right), \quad k_4 = F\left(t_k + \frac{h}{2}, X_k + k_1 \frac{h}{8} + k_3 \frac{3h}{8}\right), \\ k_5 &= F\left(t_k + h, X_k + k_1 \frac{h}{2} - k_3 \frac{3h}{2} + 2k_4 h\right). \end{aligned}$$

3. Вычисляется погрешность:

$$R = (-2k_1 + 9k_3 - 8k_4 + k_5)/30.$$

4. Проверяются условия:

$$\text{а) } |R| \leq \varepsilon; \quad \text{б) } |R| \geq \frac{\varepsilon}{30}.$$

Если оба условия выполняются, то расчет продолжается с тем же шагом. Если не выполняется условие "а", то текущий шаг делится пополам: $h_{\text{нов}} = h/2$ и процесс повторяется с п.2. Если не выполняется условие "б", то текущий шаг увеличивается вдвое: $h_{\text{нов}} = 2h$ и процесс повторяется с п.2.

Метод имеет четвертый порядок точности относительно шага h : $\varepsilon_i(h) = O(h^4)$, $i = 1, \dots, n$.

9.7. Методы Адамса-Башфорта

В многошаговом *методе Адамса-Башфорта третьего порядка* точности для нахождения точки X_{k+1} используются три предыдущие точки:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_k + \frac{1}{12} h [23F(t_k, X_k) - 16F(t_{k-1}, X_{k-1}) + \\ &+ 5F(t_{k-2}, X_{k-2})], \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (9.11)$$

Для начала расчетов требуются три "разгонные" точки X_0, X_1, X_2 , которые можно получить любым из предыдущих методов.

В многошаговом *методе Адамса-Башфорта четвертого порядка* точности для нахождения точки X_{k+1} используются четыре предыдущие точки:

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{24} h [55F(t_k, X_k) - 59F(t_{k-1}, X_{k-1}) + \\ + 37F(t_{k-2}, X_{k-2}) - 9F(t_{k-3}, X_{k-3})], \quad k = 3, 4, \dots \quad (9.12)$$

Для начала расчетов требуются четыре "разгонные" точки X_0, X_1, X_2, X_3 , которые можно получить любым из предыдущих методов.

В *методе Адамса-Башфорта пятого порядка* для нахождения точки X_{k+1} используется пять предыдущих точек:

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{720} h [1901F(t_k, X_k) - 2774F(t_{k-1}, X_{k-1}) + 2616F(t_{k-2}, X_{k-2}) - \\ - 1274F(t_{k-3}, X_{k-3}) + 251F(t_{k-4}, X_{k-4})], \quad k = 4, 5, \dots \quad (9.13)$$

Для начала расчетов требуется пять "разгонных" точек X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 .

Методы Адамса-Башфорта не позволяют изменять шаг в процессе расчетов. В отличие от метода Рунге-Кутты четвертого порядка в этих методах требуется вычислять только одно новое значение правой части системы (8.1) вместо четырех. Высокая точность методов достигается при этом за счет учета информации о предыдущих точках. Напротив, в методе Рунге-Кутты, как и в других одношаговых методах, недостающую информацию о поведении правых частей системы получают в результате вычислений в специальном образом выбранных дополнительных точках.

9.8. Методы Фельберга

В *методе Фельберга пятого порядка точности* для расчета точки X_{k+1} используется формула

$$X_{k+1} = X_k + h \left(\frac{16}{135} k_1 + \frac{6656}{12825} k_3 + \frac{28561}{56430} k_4 - \frac{9}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6 \right), \quad (9.14)$$

где

$$k_1 = F(t_k, X_k), \quad k_2 = F(t_k + \frac{h}{4}, X_k + \frac{h}{4} k_1), \quad k_3 = F(t_k + \frac{3h}{8}, X_k + \frac{3h}{32} k_1 + \frac{9h}{32} k_2), \\ k_4 = F(t_k + \frac{12h}{13}, X_k + \frac{1932h}{2197} k_1 - \frac{7200h}{2197} k_2 + \frac{7296h}{2197} k_3), \\ k_5 = F(t_k + h, X_k + \frac{439h}{216} k_1 - \frac{8hk_2}{513} k_3 - \frac{845h}{4104} k_4), \\ k_6 = F(t_k + \frac{h}{2}, X_k - \frac{8h}{27} k_1 + 2hk_2 - \frac{3544h}{2565} k_3 + \frac{1859h}{4104} k_4 - \frac{11h}{40} k_5). \quad (9.15)$$

В *методе Фельберга четвертого порядка точности* для расчета точки X_{k+1} используется формула

$$X_{k+1} = X_k + h \left(\frac{25}{216} k_1 + \frac{1408}{2565} k_3 + \frac{2197}{4104} k_4 - \frac{1}{5} k_5 \right), \quad (9.16)$$

где коэффициенты k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 определяются согласно (9.15).

9.9. Методы Ингленда

В методе Ингленда пятого порядка точности для расчета точки X_{k+1} используется формула

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{336} h (14 k_1 + 35 k_4 + 162 k_5 + 125 k_6), \quad (9.17)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= F(t_k, X_k), \quad k_2 = F(t_k + \frac{h}{2}, X_k + \frac{h}{2} k_1), \quad k_3 = F(t_k + \frac{h}{2}, X_k + \frac{h}{4} (k_1 + k_2)), \\ k_4 &= F(t_k + h, X_k + h (2k_3 - k_2)), \quad k_5 = F(t_k + \frac{2h}{3}, X_k + \frac{h}{27} (7k_1 + 10k_2 + k_4)), \\ k_6 &= F(t_k + \frac{h}{5}, X_k + \frac{h}{625} (28k_1 - 125k_2 + 546k_3 + 54k_4 - 378k_5)). \end{aligned} \quad (9.18)$$

В методе Ингленда четвертого порядка точности для расчета точки X_{k+1} используется формула

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{6} h (k_1 + 4 k_3 + k_4), \quad (9.19)$$

где коэффициенты k_1, k_3, k_4 определяются согласно (9.18).

9.10. Методы Нюстрема

В многошаговых методах Нюстрема второго, третьего и четвертого порядка точности для нахождения точки X_{k+1} используются две, три и четыре предыдущие точки соответственно:

$$X_{k+1} = X_{k-1} + 2h F(t_k, X_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (9.20)$$

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_{k-1} + \frac{1}{3} h [7 F(t_k, X_k) - 2 F(t_{k-1}, X_{k-1}) + F(t_{k-2}, X_{k-2})], \\ k &= 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (9.21)$$

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_{k-1} + \frac{1}{3} h [8 F(t_k, X_k) - 5 F(t_{k-1}, X_{k-1}) + 4 F(t_{k-2}, X_{k-2}) - \\ &\quad - F(t_{k-3}, X_{k-3})], \quad k = 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (9.22)$$

Для начала расчетов по формулам (9.20)-(9.22) требуются две, три и четыре "разгонные" точки соответственно.

З а м е ч а н и е 9.2. В практических задачах часто возникает необходимость решения дифференциального уравнения второго порядка:

$$x'' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0.$$

Для решения таких уравнений существует метод *Нюстрема пятого порядка точности*:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_k + h Y_k + h^2 \frac{14}{336} k_1 + h^2 \frac{100}{336} k_2 + h^2 \frac{54}{336} k_3, \\ Y_{k+1} &= Y_k + h \frac{14}{336} k_1 + h \frac{125}{336} k_2 + h \frac{162}{336} k_3 + h \frac{35}{336} k_4, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, X_k), \quad k_2 = f(t_k + \frac{h}{5}, X_k + \frac{h}{5} Y_k + \frac{h^2}{50} k_1), \\ k_3 &= f(t_k + \frac{2h}{3}, X_k + \frac{2h}{3} Y_k - \frac{h^2}{27} k_1 + \frac{h^2}{27} k_2), \\ k_4 &= f(t_k + h, X_k + h Y_k + \frac{3h^2}{10} k_1 - \frac{2h^2}{35} k_2 + \frac{9h^2}{35} k_3), \\ X &= x, \quad Y = x', \quad X_0 = x_0, \quad Y_0 = x'_0. \end{aligned}$$

Другие специальные методы решения уравнений второго порядка изложены в [4,18].

9.11. Явные методы Милна

Многошаговый метод *Милна четвертого порядка точности* может быть реализован двумя различными способами:

$$X_{k+1} = X_{k-3} + \frac{4}{3} h [2F(t_k, X_k) - F(t_{k-1}, X_{k-1}) + 2F(t_{k-2}, X_{k-2})], \quad k = 3, 4, \dots \quad (9.23)$$

или

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_{k-2} + \frac{3}{8} h [7F(t_k, X_k) - 3F(t_{k-1}, X_{k-1}) + 5F(t_{k-2}, X_{k-2}) - \\ &\quad - F(t_{k-3}, X_{k-3})], \quad k = 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (9.24)$$

Для начала расчетов по формулам (9.23) и (9.24) требуется четыре "разгонные" точки X_0, X_1, X_2, X_3 .

В методе *Милна шестого порядка точности* для расчета точки X_{k+1} используется шесть предыдущих точек:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_{k-5} + \frac{3}{10} h [11F(t_k, X_k) - 14F(t_{k-1}, X_{k-1}) + 26F(t_{k-2}, X_{k-2}) - \\ &\quad - 14F(t_{k-3}, X_{k-3}) + 11F(t_{k-4}, X_{k-4})], \quad k = 5, 6, \dots \end{aligned} \quad (9.25)$$

Шесть "разгонных точек" могут быть найдены любым из предыдущих методов.

9.12. Явные методы Хемминга

Многошаговый метод Хемминга четвертого порядка точности может быть реализован тремя различными способами, в каждом из которых для нахождения точки X_{k+1} используются четыре предыдущие точки:

$$X_{k+1} = \frac{X_k + X_{k-1}}{2} + \frac{1}{48} h [119F(t_k, X_k) - 99F(t_{k-1}, X_{k-1}) + 69F(t_{k-2}, X_{k-2}) - 17F(t_{k-3}, X_{k-3})], \quad k = 3, 4, \dots \quad (9.26)$$

или

$$X_{k+1} = \frac{2X_{k-1} + X_{k-2}}{3} + \frac{1}{72} h [191F(t_k, X_k) - 107F(t_{k-1}, X_{k-1}) + 109F(t_{k-2}, X_{k-2}) - 25F(t_{k-3}, X_{k-3})], \quad k = 3, 4, \dots \quad (9.27)$$

или

$$X_{k+1} = \frac{X_k + X_{k-1} + X_{k-2}}{3} + \frac{1}{36} h [91F(t_k, X_k) - 63F(t_{k-1}, X_{k-1}) + 57F(t_{k-2}, X_{k-2}) - 13F(t_{k-3}, X_{k-3})], \quad k = 3, 4, \dots \quad (9.28)$$

Для начала расчетов по любой из формул (9.26), (9.27) или (9.28) требуется четыре "разгонные" точки X_0, X_1, X_2, X_3 .

9.13. Экстраполяционные методы

Формулы предсказания, рассмотренные в предыдущих разделах, можно рассматривать как методы экстраполяции, где X_{k+1} экстраполируется по известным предыдущим значениям. В данном разделе рассмотрены другие типы экстраполяции.

Процедура нахождения следующей точки (t_{k+1}, X_{k+1}) содержит два этапа.

Первый этап. Получение последовательности значений решения при $t = t_{k+1}$, найденных на основе некоторой стратегии уменьшения шага.

Второй этап. Уточнение численного решения на основе процедур полиномиальной или рациональной экстраполяции.

Способы реализации первого этапа

Рассмотрим процедуру интегрирования дифференциального уравнения (8.1) на двухточечном шаблоне (t_k, t_{k+1}) с базовой длиной шага h . Определим последовательность чисел $N_0, N_1, \dots, N_M$ - частичных отрезков, располагающихся на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$:

$$N_M > N_{M-1} > \dots > N_1 > N_0, \quad (9.29)$$

где M - максимальный допустимый порядок экстраполяции, и соответствующую последовательность шагов $h_0, h_1, \dots, h_M$:

$$h_r = \frac{h}{N_r}, \quad r = 0, 1, \dots, M. \quad (9.30)$$

Предположим, что точка (t_k, X_k) известна. При каждом значении r зададим сетку

$$x_s = t_k + s h_r, \quad s = 0, 1, \dots, N_r, \quad x_0 = t_k, \quad x_{N_r} = t_{k+1}, \quad (9.31)$$

и, применяя какой-либо разностный метод, интегрируем решаемое уравнение на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ с каждым значением шага h_r . В результате получится $M+1$ приближенных решений. Соответствующие этим решениям числовые значения обозначим следующим образом:

$$T_{r,0} = X(t_{k+1}, h_r), \quad r = 0, 1, \dots, M, \quad (9.32)$$

где под $X(t_{k+1}, h_r)$ понимается решение рассматриваемой задачи Коши в точке t_{k+1} , полученное при интегрировании с шагом h_r .

На первом этапе процесс интегрирования рекомендуется проводить следующими методами:

а) левым методом Эйлера:

$$Z_0 = X_k, \quad Z_s = Z_{s-1} + h_r F(x_s, Z_{s-1}), \quad s = 1, \dots, N_r - 1, \quad T_{r,0} = Z_{N_r}; \quad (9.33)$$

б) методом трапеций:

$$Z_0 = X_k, \quad Z_s = Z_{s-1} + \frac{1}{2} h_r [F(x_s, Z_{s-1}) + F(x_s, Z_s)], \\ s = 1, \dots, N_r - 1, \quad T_{r,0} = Z_{N_r};$$

в) методом Эйлера-Коши, модифицированным Греггом:

$$Z_0 = X_k, \quad Z_1 = Z_0 + h_0 F(x_0, Z_0), \quad Z_s = Z_{s-1} + 2 h_r F(x_s, Z_s), \\ s = 1, \dots, N_r - 1, \quad T_{r,0} = \frac{1}{2} [Z_{N_r-1} + Z_{N_r} + h F(x_{N_r}, Z_{N_r})]; \quad (9.34)$$

г) обратным методом Эйлера:

$$Z_0 = X_k, \quad Z_s = \frac{Z_s^2}{Z_s - h_r F(x_s, Z_s)}, \quad s = 1, \dots, N_r - 1, \quad T_{r,0} = Z_{N_r}; \quad (9.35)$$

д) по правилу средней точки:

$$Z_0 = X_k, \quad Z_s = Z_{s-1} + h_r F(x_s + \frac{1}{2} h_r, \frac{1}{2} (Z_{s-1} + Z_s)), \quad s = 1, \dots, N_r - 1, \quad T_{r,0} = Z_{N_r};$$

е) методом Бадера и Дойфахарда [45], который был разработан для решения жестких автономных систем вида $X' = F(X)$. Заметим, что неавтономные

системы вида $X' = F(t, X)$ всегда можно свести к автономным путем введения новой переменной, удовлетворяющей уравнению $y'_{n+1} = 1$, $y_{n+1}(t_0) = t_0$, и рассматривая расширенный вектор $Y = (X, y_{n+1})$. С учетом обозначений

$$J = F_X(X), \quad \bar{F}(X) = F(X) - J \cdot X, \quad h_r = \frac{h}{2r}$$

метод записывается в форме

$$\begin{aligned} Z_0 &= X_k, \quad Z_1 = (E - h_r J)^{-1} [X_k + h_r \bar{F}(X_k)], \\ Z_{s+1} &= (E - h_r J)^{-1} [(E + h_r J) Z_{s-1} + 2 h_r \bar{F}(Z_s)], \quad s = 1, 2, \dots, 2r, \\ T_{r,0} &= \frac{1}{2} (Z_{2r-1} + Z_{2r}). \end{aligned}$$

В результате применения любого из методов получается столбец:

$$\begin{aligned} &T_{0,0} \\ &T_{1,0} \\ &\dots \\ &T_{M-1,0} \\ &T_{M,0}. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 9.3. Разными авторами рекомендуются следующие последовательности (9.29):

- Дойфхардом:
 $N_r = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \dots$ или $N_r = 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \dots$;
- Ромбергом:
 $N_r = 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$ или $N_r = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$;
- Булиршем и Штером:
 $N_r = 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, \dots$ или $N_r = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, \dots$;
- "гармоническая" последовательность: $N_r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$

Способы реализации второго этапа

По полученным на первом этапе $(M+1)$ точкам $(h_r, X(t_{k+1}, h_r))$ может быть построен либо полином M -й степени, либо рациональная функция. Искомое приближенное решение X_{k+1} определяется значением построенной функции при величине шага, равной нулю.

Таким образом, для уточнения найденных на первом этапе решений используются:

а) *полиномиальная экстраполяция Эйткена-Невилла*:

$$T_{r,0} = X(t_{k+1}, h_r), \quad r = 0, 1, \dots, M; \quad T_{r,s} = T_{r+1,s-1} + \frac{T_{r+1,s-1} - T_{r,s-1}}{\left(\frac{h_r}{h_{r+s}}\right)^\gamma - 1}, \quad (9.36)$$

$$s = 1, 2, \dots, M; \quad r = 0, 1, \dots, M-s; \quad \gamma = 1 \text{ или } \gamma = 2.$$

Таблица 9.14

	$T_{0,0}$		
$T_{1,-1}$		$T_{0,1}$	
	$T_{1,0}$		$T_{0,2}$
$T_{2,-1}$		$T_{1,1}$	
	$T_{2,0}$		
			$T_{0,M-1}$
...	...		$T_{0,M}$
		$T_{M-2,1}$	
	$T_{M-1,0}$		$T_{1,M-1}$
		$T_{M-2,2}$	
$T_{M,-1}$		$T_{M-1,1}$	
	$T_{M,0}$		

Решение. Точное решение задачи $x(t) = \operatorname{tg}(t + \pi/4)$, $x(0,25) = 1,685796417$. Поскольку $M = 3$, выберем четыре первых числа из последовательности Ромберга: 2, 4, 8, 16, то есть $N_0 = 2$, $N_1 = 4$, $N_2 = 8$, $N_3 = 16$. Тогда по формуле (9.30) получаем: $h_0 = \frac{0,25}{2}$, $h_1 = \frac{0,25}{4}$, $h_2 = \frac{0,25}{8}$, $h_3 = \frac{0,25}{16}$.

Для нахождения приближенного решения задачи применим явный метод Эйлера (9.33) и рациональную экстраполяцию при $\gamma = 1$ (табл.9.15).

Таблица 9.15

	1,5703125000		
0		1,6720018467	
	1,6195625218		1,6854629545
0		1,6814888520	1,6857868712
	1,6499448310		1,6857435231
0		1,6845757643	
	1,6670804665		

Элементы второго столбца табл.9.15 получены по формулам (9.33), то есть

$$T_{0,0} = X(0,25; h_0) = 1,5703125000, \quad T_{1,0} = X(0,25; h_1) = 1,6195625218,$$

$$T_{2,0} = X(0,25; h_2) = 1,6499448310, \quad T_{3,0} = X(0,25; h_3) = 1,6670804665.$$

Приведем примеры расчетов по формулам (9.37):

$$T_{0,1} = T_{1,0} + \frac{T_{1,0} - T_{0,0}}{\left(\frac{h_0}{h_1}\right)^1 \left(1 - \frac{T_{1,0} - T_{0,0}}{T_{1,0} - T_{1,-1}}\right) - 1} =$$

$$= 1,6195625218 + \frac{1,6195625218 - 1,5703125000}{2^1 \left(1 - \frac{1,6195625218 - 1,5703125000}{1,6195625218 - 0}\right) - 1} = 1,6720018467;$$

$$T_{1,1} = T_{2,0} + \frac{T_{2,0} - T_{1,0}}{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^1 \left(1 - \frac{T_{2,0} - T_{1,0}}{T_{2,0} - T_{2,-1}}\right) - 1} =$$

$$= 1,6499448310 + \frac{1,6499448310 - 1,6195625218}{2^1 \left(1 - \frac{1,6499448310 - 1,6195625218}{1,6499448310 - 0}\right) - 1} = 1,6814888520;$$

$$T_{0,2} = T_{1,1} + \frac{T_{1,1} - T_{0,1}}{\left(\frac{h_0}{h_2}\right)^1 \left(1 - \frac{T_{1,1} - T_{0,1}}{T_{1,1} - T_{1,0}}\right) - 1} =$$

$$= 1,6814888520 + \frac{1,6814888520 - 1,6720018467}{4^1 \left(1 - \frac{1,6814888520 - 1,6720018467}{1,6814888520 - 1,6195625218}\right) - 1} = 1,6854629545;$$

$$T_{0,3} = T_{1,2} + \frac{T_{1,2} - T_{0,2}}{\left(\frac{h_0}{h_3}\right)^1 \left(1 - \frac{T_{1,2} - T_{0,2}}{T_{1,2} - T_{1,1}}\right) - 1} =$$

$$= 1,6857435231 + \frac{1,6857435231 - 1,6854629545}{8^1 \left(1 - \frac{1,6857435231 - 1,6854629545}{1,6857435231 - 1,6814888520}\right) - 1} = 1,6857868712.$$

Остальные вычисления проводятся аналогично. Погрешность полученного решения $\chi(0,25) = 1,6857868712$ составляет

$$|1,6857868712 - 1,685796417| = 5,2894 \cdot 10^{-5}.$$

Теперь для решения задачи воспользуемся обратным методом Эйлера (9.35) и полиномиальной экстраполяцией с параметром $\gamma = 1$ (табл.9.16).

Таблица 9.16

1,8028169014			
	1,6729289242		
1,7378729128		1,6865256650	
	1,6831264798		1,6857760212
1,7104996963		1,6858697276	
	1,6851839150		
1,6978418056			

Здесь результаты экстраполяции находятся по формуле (9.36), например

$$T_{0,3} = T_{1,2} + \frac{T_{1,2} - T_{0,2}}{\left(\frac{h_0}{h_2}\right)^1 - 1} =$$

$$= 1,6858697276 + \frac{1,6858697276 - 1,6865256650}{8^1 - 1} = 1,6857760212.$$

Погрешность полученного решения $x(0,25) = 1,6857760212$ составляет

$$|1,6857760212 - 1,685796417| = 2,039 \cdot 10^{-5}.$$

Далее, применим обратный метод Эйлера (9.35) и рациональную экстраполяцию при $\gamma = 1$ (табл.9.17). Погрешность решения $x(0,25) = 1,6857961912$ составляет $|1,6857961912 - 1,685796417| = 7,2598 \cdot 10^{-6}$.

Таблица 9.17

	1,8028169014		
0		1,6774452643	
	1,7378729128		1,6858494038
0		1,6839754186	1,6857961912
	1,7104996963		1,6858026769
0		1,6853698785	
	1,6978418056		

Наконец, воспользуемся модифицированным методом Эйлера-Коши и рациональной экстраполяцией при $\gamma = 2$ (метод Грегга-Булирша-Штера) (табл.9.18).

Погрешность полученного решения $x(0,25) = 1,6857963393$ составляет

$$|1,6857963393 - 1,685796417| = 3,4425 \cdot 10^{-7}.$$

Таблица 9.18

	1,6406250000		
0	1,6842556897		/
	1,6731318956	1,6857813466	
0	1,6856738366		1,6857963393
	1,6825207564	1,6857960729	
0	1,6857881562		
	1,6849701171		

Таким образом, полученное в табл.9.18 решение точнее остальных.

9.14. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти критический шаг для решения задачи Коши $x' - 4x = \sin t$, $x(0) = 2$, явным методом Эйлера. Ответ: $h_{кр} = 2\tau = 0,5$.

2. Выписать формулы: а) явного метода Эйлера; б) метода Эйлера-Коши; в) метода предсказания и коррекции; г) метода Адамса-Башфорта третьего порядка для задачи 1.

Ответ:

а) $X_{k+1} = X_k + h(4X_k + \sin t_k)$, $X_0 = 2$; $k = 0, 1, \dots$;

б) $\tilde{X}_{k+1} = X_k - 1 + 2h(4X_k + \sin t_k)$, $X_0 = 2$; $k = 1, 2, \dots$;

в) $\tilde{X}_{k+1} = X_k + h(4X_k + \sin t_k)$, $X_0 = 2$, $k = 0, 1, \dots$

$X_{k+1} = X_k + \frac{h}{2}(4X_k + \sin t_k + 4\tilde{X}_{k+1} + \sin t_{k+1})$;

г) $X_{k+1} = X_k + \frac{h}{12}(23(4X_k + \sin t_k) - 16(4X_{k-1} + \sin t_{k-1}) + 5(4X_{k-2} + \sin t_{k-2}))$, $k = 2, 3, \dots$

3. Выписать формулы: а) явного метода Эйлера; б) метода предсказания и коррекции для решения задачи Коши:

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 9t, x(0) = 1, \\ y' = 2x + y + 4e^t, y(0) = 2. \end{cases}$$

Ответ: а) $x_{k+1} = x_k + h(x_k + 2y_k - 9t_k)$, $x_0 = 1$,

$y_{k+1} = y_k + h(2x_k + y_k + 4e^{t_k})$, $y_0 = 2$; $k = 0, 1, \dots$

б) $\tilde{x}_{k+1} = x_k + h(x_k + 2y_k - 9t_k)$, $x_0 = 1$,

$\tilde{y}_{k+1} = y_k + h(2x_k + y_k + 4e^{t_k})$, $y_0 = 2$, $k = 0, 1, \dots$

$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}(x_k + 2y_k - 9t_k + \tilde{x}_{k+1} + 2\tilde{y}_{k+1} - 9t_{k+1})$,

$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(2x_k + y_k + 4e^{t_k} + 2\tilde{x}_{k+1} + \tilde{y}_{k+1} + 4e^{t_{k+1}})$, $k = 0, 1, \dots$

10. Неявные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений

10.1. Неявный метод Эйлера

В *неявном методе Эйлера* для вычисления X_{k+1} используется формула

$$X_{k+1} = X_k + hF(t_{k+1}, X_{k+1}) = \Phi(X_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (10.1)$$

Здесь искомая величина X_{k+1} , в отличие от явного метода Эйлера, входит в обе части равенства. Неявный метод Эйлера является А-устойчивым для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и имеет первый порядок точности относительно шага h : $e_i(h) = O(h)$, $i = 1, \dots, n$.

10.2. Метод трапеций

В *методе трапеций* для вычисления точки X_{k+1} используется формула

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{2} h [F(t_k, X_k) + F(t_{k+1}, X_{k+1})] = \Phi(X_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (10.2)$$

и, как и в предыдущем случае, искомая величина X_{k+1} входит в обе части равенства. Метод трапеций является А-устойчивым для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и имеет второй порядок точности относительно шага h : $e_i(h) = O(h^2)$, $i = 1, \dots, n$.

10.3. Метод Адамса-Мултона

В *методе Адамса-Мултона* для вычисления X_{k+1} используется формула

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{12} h [5F(t_{k+1}, X_{k+1}) + 8F(t_k, X_k) - F(t_{k-1}, X_{k-1})] = \Phi(X_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (10.3)$$

и, как и ранее, искомая величина X_{k+1} входит в обе части равенства. Метод Адамса-Мултона является двухшаговым. Для начала расчета требуется знать две "разгонные" точки X_0, X_1 . Метод не является А-устойчивым и имеет четвертый порядок точности относительно шага h : $e_i(h) = O(h^4)$, $i = 1, \dots, n$.

Неявный метод Эйлера и метод трапеций также относятся к группе методов Адамса-Мултона, а выделены отдельно в силу их большой распространенности.

В более точных методах, относящихся к неявным методам Адамса для нахождения точки X_{k+1} используются три или четыре предыдущие точки соответственно:

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{24} h [9F(t_{k+1}, X_{k+1}) + 19F(t_k, X_k) - 5F(t_{k-1}, X_{k-1}) + F(t_{k-2}, X_{k-2})] = \Phi(X_{k+1}), \quad k = 2, 3, \dots \quad (10.4)$$

или

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{720} h [251F(t_{k+1}, X_{k+1}) + 646F(t_k, X_k) - 264F(t_{k-1}, X_{k-1}) + 106F(t_{k-2}, X_{k-2}) - 19F(t_{k-3}, X_{k-3})] = \Phi(X_{k+1}), \quad k = 3, 4, \dots \quad (10.5)$$

Для начала расчетов требуется знать три или четыре "разгонных" точки соответственно.

В алгоритмах, определяемых формулами (10.1)-(10.5), значение X_{k+1} находится как решение уравнения

$$X_{k+1} = \Phi(X_{k+1}) \quad (10.6)$$

или

$$X_{k+1} - \Phi(X_{k+1}) = \Psi(X_{k+1}) = 0 \quad (10.7)$$

с помощью методов простой итерации и Зейделя [8,20,28] или с помощью метода Ньютона и его модификаций [8,20]. Начальное приближение $X_{k+1}^{(0)}$ для итерационного процесса решения уравнения (10.7) находится с помощью прогноза явным методом Эйлера или другими способами. Например, возможен "постоянный прогноз" $X_{k+1}^{(0)} = X_k$. При этом на каждой итерации относительно точки X_{k+1}

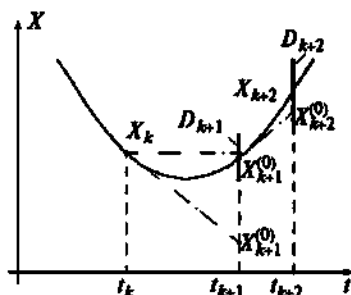


Рис.10.1

существует область сходимости D_{k+1} методов решения нелинейного алгебраического уравнения (10.6) или (10.7). Прогноз должен обеспечить попадание начального приближения $X_{k+1}^{(0)}$ в эту область. На рис.10.1 изображены случаи неудачного и удачного - "постоянного прогноза" в точке t_{k+1} и случай удачного прогноза по явному методу Эйлера в точке t_{k+2} .

З а м е ч а н и е 10.1. Одним из вариантов метода предсказания и коррекции является использование предсказания по методу Адамса-Башфорта и коррекции по Адамсу-Мултону, а именно предсказание выполняется по формуле

$$\tilde{X}_{k+1} = X_k + \frac{1}{24} h [55F(t_k, X_k) - 59F(t_{k-1}, X_{k-1}) + 37F(t_{k-2}, X_{k-2}) - 9F(t_{k-3}, X_{k-3})], \quad k = 3, 4, \dots,$$

а коррекция - по формуле

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{24} h [9F(t_{k+1}, \tilde{X}_{k+1}) + 19F(t_k, X_k) - 5F(t_{k-1}, X_{k-1}) + F(t_{k-2}, X_{k-2})], \quad k = 2, 3, \dots$$

10.4. Неявные методы Милна

В *неявных методах Милна* (третьего и четвертого порядка точности) для вычисления точки X_{k+1} используются следующие формулы:

$$X_{k+1} = X_{k-1} + \frac{1}{3} h [F(t_{k+1}, X_{k+1}) + 4F(t_k, X_k) + F(t_{k-1}, X_{k-1})] = \Phi(X_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (10.8)$$

в методе третьего порядка точности и

$$X_{k+1} = X_{k-2} + \frac{3}{8} h [F(t_{k+1}, X_{k+1}) + 3F(t_k, X_k) + 3F(t_{k-1}, X_{k-1}) + F(t_{k-2}, X_{k-2})] = \Phi(X_{k+1}), \quad k = 2, 3, \dots \quad (10.9)$$

в методе четвертого порядка точности.

Для начала расчетов требуется иметь две и три "разгонные" точки соответственно. Формулы, в которых используется большее число предыдущих точек, приведены в [4].

10.5. Неявные методы Хемминга

Многошаговый *неявный метод Хемминга четвертого порядка* может быть реализован тремя различными способами:

$$X_{k+1} = \frac{X_k + X_{k-1}}{2} + \frac{1}{48} h [17F(t_{k+1}, X_{k+1}) + 51F(t_k, X_k) + 3F(t_{k-1}, X_{k-1}) + F(t_{k-2}, X_{k-2})] = \Phi(X_{k+1}), \quad k = 2, 3, \dots; \quad (10.10)$$

$$X_{k+1} = \frac{2X_{k-1} + X_{k-2}}{3} + \frac{1}{72} h [25F(t_{k+1}, X_{k+1}) + 91F(t_k, X_k) + 43F(t_{k-1}, X_{k-1}) + 9F(t_{k-2}, X_{k-2})] = \Phi(X_{k+1}), \quad k = 2, 3, \dots; \quad (10.11)$$

$$X_{k+1} = \frac{X_k + X_{k-1} + X_{k-2}}{3} + \frac{1}{72} h [26F(t_{k+1}, X_{k+1}) + 73F(t_k, X_k) + 30F(t_{k-1}, X_{k-1}) + 10F(t_{k-2}, X_{k-2})] = \Phi(X_{k+1}), \quad k = 2, 3, \dots; \quad (10.12)$$

Для начала расчетов по любой из формул (10.10)-(10.12) требуется иметь три "разгонные" точки: X_0, X_1, X_2 .

10.6. Методы дифференцирования назад

При решении жестких систем уравнений распространенными являются методы, основанные на формулах дифференцирования назад.

Метод дифференцирования назад второго порядка точности реализуется формулой

$$X_{k+1} = \frac{4}{3} X_k - \frac{1}{3} X_{k-1} + \frac{2}{3} h F(t_{k+1}, X_{k+1}) = \Phi(X_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (10.13)$$

Начальное приближение $X_{k+1}^{(0)}$ для решения уравнения $X_{k+1} = \Phi(X_{k+1})$ может быть найдено по формуле

$$X_{k+1}^{(0)} = X_{k-1} + 2 h F(t_k, X_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad \text{или} \quad X_{k+1}^{(0)} = 2X_k - X_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для начала расчетов требуются две "разгонные" точки X_0, X_1 .

Метод дифференцирования назад третьего порядка точности реализуется формулой

$$X_{k+1} = \frac{18}{11} X_k - \frac{9}{11} X_{k-1} + \frac{2}{11} X_{k-2} + \frac{6}{11} h F(t_{k+1}, X_{k+1}) = \Phi(X_{k+1}), \quad k = 2, 3, \dots \quad (10.14)$$

Начальное приближение $X_{k+1}^{(0)}$ для решения уравнения $X_{k+1} = \Phi(X_{k+1})$ может быть найдено по формуле

$$X_{k+1}^{(0)} = -\frac{3}{2} X_k + 3X_{k-1} - \frac{1}{2} X_{k-2} + 3h F(t_k, X_k), \quad k = 2, 3, \dots$$

или

$$X_{k+1}^{(0)} = 3X_k - 3X_{k-1} + X_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Для начала расчетов требуются три "разгонные" точки X_0, X_1, X_2 .

Метод дифференцирования назад четвертого порядка точности реализуется формулой

$$X_{k+1} = \frac{48}{25} X_k - \frac{36}{25} X_{k-1} + \frac{16}{25} X_{k-2} - \frac{3}{25} X_{k-3} + \frac{12}{25} h F(t_{k+1}, X_{k+1}) = \Phi(X_{k+1}), \quad k = 3, 4, \dots \quad (10.15)$$

Начальное приближение $X_{k+1}^{(0)}$ для решения уравнения $X_{k+1} = \Phi(X_{k+1})$ может быть найдено по формуле

$$X_{k+1}^{(0)} = -\frac{10}{3} X_k + 6X_{k-1} - 2X_{k-2} + \frac{1}{3} X_{k-3} + 4h F(t_k, X_k), \quad k = 3, 4, \dots$$

или

$$X_{k+1}^{(0)} = 4X_k - 6X_{k-1} + 4X_{k-2} - X_{k-3}, \quad k = 3, 4, \dots$$

Для начала расчетов требуются четыре "разгонные" точки X_0, X_1, X_2, X_3 .

Метод дифференцирования назад пятого порядка точности реализуется формулой

$$X_{k+1} = \frac{300}{137} X_k - \frac{300}{137} X_{k-1} + \frac{200}{137} X_{k-2} - \frac{75}{137} X_{k-3} + \frac{12}{137} X_{k-4} + \frac{60}{137} h F(t_{k+1}, X_{k+1}) = \Phi(X_{k+1}), \quad k = 4, 5, \dots \quad (10.16)$$

Начальное приближение $X_{k+1}^{(0)}$ для решения уравнения $X_{k+1} = \Phi(X_{k+1})$ может быть найдено по формуле

$$X_{k+1}^{(0)} = -\frac{65}{12} X_k + 10X_{k-1} - 5X_{k-2} + \frac{5}{3} X_{k-3} - \frac{1}{4} X_{k-4} + 5h F(t_k, X_k), \quad k = 4, 5, \dots$$

или

$$X_{k+1}^{(0)} = 5X_k - 10X_{k-1} + 10X_{k-2} - 5X_{k-3} + X_{k-4}, \quad k = 4, 5, \dots$$

Для начала расчетов требуется пять "разгонных" точек X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 .

Метод дифференцирования назад шестого порядка точности реализуется формулой

$$X_{k+1} = \frac{360}{147} X_k - \frac{450}{147} X_{k-1} + \frac{400}{147} X_{k-2} - \frac{225}{147} X_{k-3} + \frac{72}{147} X_{k-4} - \frac{10}{147} X_{k-5} + \frac{60}{147} h F(t_{k+1}, X_{k+1}) = \Phi(X_{k+1}), \quad k = 5, 6, \dots \quad (10.17)$$

Начальное приближение $X_{k+1}^{(0)}$ для решения уравнения $X_{k+1} = \Phi(X_{k+1})$ может быть найдено по формуле

$$X_{k+1}^{(0)} = -\frac{77}{10} X_k + 15X_{k-1} - 10X_{k-2} + 5X_{k-3} - \frac{3}{2} X_{k-4} + \frac{1}{5} X_{k-5} + 6h F(t_k, X_k), \quad k = 5, 6, \dots$$

или

$$X_{k+1}^{(0)} = 6X_k - 15X_{k-1} + 20X_{k-2} - 15X_{k-3} + 6X_{k-4} - X_{k-5}, \quad k = 5, 6, \dots$$

Для начала расчетов требуется шесть "разгонных" точек $X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$.

10.7. Неявные методы Рунге-Кутты

В неявном методе Рунге-Кутты второго порядка точности для нахождения точки X_{k+1} используется формула

$$X_{k+1} = X_k + h k_1, \quad (10.18)$$

где k_1 - решение уравнения $k_1 = F\left(t_k + \frac{h}{2}, X_k + \frac{h}{2} k_1\right)$.

В неявном методе Рунге-Кутты четвертого порядка точности для нахождения точки X_{k+1} используется формула

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{2} h (k_1 + k_2), \quad (10.19)$$

где k_1 и k_2 - решения системы уравнений:

$$k_1 = F\left(t_k + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, X_k + \frac{h}{4}k_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h k_2\right),$$

$$k_2 = F\left(t_k + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, X_k + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h k_1 + \frac{h}{4}k_2\right).$$

В неявном методе Рунге-Кутты шестого порядка точности для нахождения точки X_{k+1} используется формула

$$X_{k+1} = X_k + h \left(\frac{5}{18} k_1 + \frac{4}{9} k_2 + \frac{5}{18} k_3 \right), \quad (10.20)$$

где k_1 , k_2 и k_3 - решения системы уравнений

$$k_1 = F\left(t_k + \frac{5 - \sqrt{15}}{10}h, X_k + \frac{5}{36}h k_1 + \frac{80 - 24\sqrt{15}}{360}h k_2 + \frac{50 - 12\sqrt{15}}{360}h k_3\right),$$

$$k_2 = F\left(t_k + \frac{h}{2}, X_k + \frac{50 + 15\sqrt{15}}{360}h k_1 + \frac{2}{9}h k_2 + \frac{50 - 15\sqrt{15}}{360}h k_3\right),$$

$$k_3 = F\left(t_k + \frac{5 + \sqrt{15}}{10}h, X_k + \frac{50 + 12\sqrt{15}}{360}h k_1 + \frac{80 + 24\sqrt{15}}{360}h k_2 + \frac{5}{36}h k_3\right).$$

Обычно применение неявных методов Рунге-Кутты эффективно при решении жестких систем уравнений.

Классификация всех рассмотренных в настоящем пособии численных методов приведена в заключении к части 2.

Пример 10.1. Приблизительно решить уравнение

$$x' = -2x - 3t + 2$$

на отрезке $[0,1]$ с начальным условием $x(0) = 0$, шагом $h = 0,1$ методами Эйлера (явным и неявным), предсказания и коррекции, Рунге-Кутты четвертого порядка и трапеций.

Решение. Для определения τ_{min} перепишем заданное уравнение в виде $\frac{1}{2}x' + x = -\frac{3}{2}t + 1$, подобном (В.9), откуда следует, что $\tau_{min} = T = \frac{1}{2}$, то есть $h_{кр} = 2\tau_{min} = 1$ для явного метода Эйлера и $h_{кр} = 2,71\tau_{min} = 1,355$ для метода Рунге-Кутты. Следовательно, интегрирование с шагом $h = 0,1$ обеспечивает устойчивость этих методов.

Используя исходный вид уравнения, получаем из (9.1) формулу явного метода Эйлера:

$$X_{k+1} = X_k + 0,1(-2X_k - 3t_k + 2), \quad t_k = t_{k-1} + h, \quad k = 1, 2, \dots, 10, \quad t_0 = 0, \quad X_0 = 0;$$

из (9.4), (9.5) - формулы для метода предсказания и коррекции:

$$\tilde{X}_{k+1} = X_k + 0,1(-2X_k - 3t_k + 2), \quad X_{k+1} = X_k + 0,05(-2X_k - 3t_k + 2 - 2\tilde{X}_{k+1} - 3t_{k+1} + 2);$$

из (9.6), (9.7) - формулы для метода Рунге-Кутты четвертого порядка:

$$X_{k+1} = X_k + \frac{0,1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = -2X_k - 3t_k + 2, \quad k_2 = -2(X_k + 0,05k_1) - 3(t_k + 0,05) + 2,$$

$$k_3 = -2(X_k + 0,05k_2) - 3(t_k + 0,05) + 2, \quad k_4 = -2(X_k + 0,1k_3) - 3(t_k + 0,1) + 2;$$

из (10.1) - формулу для неявного метода Эйлера:

$$X_{k+1} = X_k + 0,1(-2X_{k+1} - 3t_{k+1} + 2),$$

откуда

$$X_{k+1} = \frac{X_k - 0,3t_{k+1} + 0,2}{1,2};$$

из (10.2) - формулу для метода трапеций:

$$X_{k+1} = X_k + \frac{0,1}{2}(-2X_k - 3t_k + 2 - 2X_{k+1} - 3t_{k+1} + 2),$$

откуда

$$X_{k+1} = \frac{0,9X_k - \frac{3}{2} \cdot 0,1t_k + 2 \cdot 0,1 - \frac{3}{2} \cdot 0,1t_{k+1}}{1,1}.$$

Точное решение рассматриваемой задачи получено в примере 3.18, а именно $x(t) = 1,75 - 1,5t - 1,75e^{-2t}$. Результаты расчетов приведены в табл.10.1.

Пример 10.2. Приблизленно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x' = y - 1, \\ y' = -x - 2y \end{cases}$$

Таблица 10.1

t_k	Метод Эйлера явный, X_k	Метод Эйлера неявный, X_k	Метод Рунге-Кутты, X_k	Метод предсказания и коррекции, X_k	Метод трапеций, X_k	$x(t_k)$
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,200	0,142	0,167	0,165	0,168	0,167
0,2	0,330	0,238	0,277	0,273	0,279	0,277
0,3	0,404	0,287	0,340	0,335	0,342	0,340
0,4	0,433	0,306	0,364	0,359	0,366	0,364
0,5	0,427	0,297	0,356	0,351	0,358	0,356
0,6	0,391	0,264	0,323	0,318	0,325	0,323
0,7	0,333	0,212	0,268	0,264	0,270	0,268
0,8	0,256	0,143	0,197	0,192	0,199	0,197
0,9	0,165	0,061	0,111	0,107	0,112	0,111
1,0	0,062	-0,033	0,013	0,009	0,015	0,013
шаг, h	0,068	0,059	0,0000104	0,005	0,002	

на отрезке $[0,1]$ с начальными условиями $x(0) = 1$, $y(0) = -1$, шагом $h = 0,1$ методами Эйлера (явным и модифицированным), Адамса-Башфорта третьего порядка и трапеций.

Решение. Используя соотношения (10.1), (9.3), (9.8) и (9.9), (10.2), выпишем формулы для расчета приближенного решения указанными методами. Для каждого из методов будем обозначать через $X_k = (x_k, y_k)^T$ - искомое приближенное решение.

Для неявного метода Эйлера имеем

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} y_{k+1} - 1 \\ -x_{k+1} - 2y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k + 0,1 y_{k+1} - 0,1 \\ y_k - 0,1 x_{k+1} - 0,2 y_{k+1} \end{pmatrix},$$

$$t_k = t_{k-1} + h, \quad k = 1, 2, \dots, 10, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = x(0) = 1, \quad y_0 = y(0) = -1.$$

Разрешая полученную систему относительно X_{k+1} , окончательно имеем

$$x_{k+1} = \frac{0,1(y_k - 0,1x_k + 0,01)}{1,21} - 0,1; \quad y_{k+1} = \frac{y_k - 0,1x_k + 0,01}{1,21}.$$

Соотношения (9.3) для модифицированного метода Эйлера в данном примере принимают вид

$$\begin{aligned}x_{k+1/2} &= x_k + \frac{0,1}{2} (y_k - 1), \quad y_{k+1/2} = y_k + \frac{0,1}{2} (-x_k - 2y_k), \\x_{k+1} &= x_k + 0,1 (y_{k+1/2} - 1), \quad y_{k+1} = y_k + 0,1 (-x_{k+1/2} - 2y_{k+1/2}).\end{aligned}$$

Для метода Адамса-Башфорта третьего порядка из (9.10) получаем:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + \frac{0,1}{12} [23(y_k - 1) - 16(y_{k-1} - 1) + 5(y_{k-2} - 1)], \\y_{k+1} &= y_k + \frac{0,1}{12} [23(-x_k - 2y_k) - 16(-x_{k-1} - 2y_{k-1}) + 5(-x_{k-2} - 2y_{k-2})].\end{aligned}$$

Для определения "разгонных" точек X_1 и X_2 воспользуемся модифицированным методом Эйлера, точка X_0 определяется начальными условиями.

Выпишем теперь соотношения (10.2) метода трапеций и разрешим их относительно искомой величины X_{k+1} :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \frac{0,1}{2} \left[\begin{pmatrix} y_k - 1 \\ -x_k - 2y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{k+1} - 1 \\ -x_{k+1} - 2y_{k+1} \end{pmatrix} \right] = \\&= \begin{pmatrix} x_k + 0,05y_k + 0,05y_{k+1} - 0,1 \\ -0,05x_k - 0,05x_{k+1} + 0,9y_k - 0,1y_{k+1} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

откуда получаем

$$x_{k+1} = x_k + 0,05y_k + 0,05 \frac{-0,1x_k + 0,8975y_k + 0,05}{1,1025} - 0,1;$$

$$y_{k+1} = \frac{-0,1x_k + 0,8975y_k + 0,05}{1,1025}.$$

Результаты проведенных расчетов приведены в табл.10.2 для $x(t)$ и табл. 10.3 для $y(t)$ соответственно.

Точное решение рассматриваемой задачи получено в примере 4.48 и имеет вид

$$x(t) = -2 + 3e^{-t} + te^{-t}, \quad y(t) = 1 - 2e^{-t} - te^{-t}.$$

Таблица 10.2

t_k	Метод Эйлера неявный, x_k	Метод Эйлера модифицированный, x_k	Метод Адамса-Башфорта, x_k	Метод трапеций, x_k	$x(t_k)$
0,0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,1	0,80992	0,80500	0,80499	0,80499	0,80500
0,2	0,62960	0,61997	0,61991	0,61991	0,61994
0,3	0,45885	0,44479	0,44469	0,44464	0,44470
0,4	0,29740	0,27924	0,27908	0,27900	0,27909
0,5	0,14500	0,12309	0,12285	0,12273	0,12286
0,6	0,00131	-0,02397	-0,02428	-0,02444	-0,02428
0,7	-0,13397	-0,16224	-0,16265	-0,16284	-0,16263
0,8	-0,26119	-0,29208	-0,29257	-0,29279	-0,29255
0,9	-0,38072	-0,41384	-0,41441	-0,41465	-0,41438
1,0	-0,49287	-0,52787	-0,52853	-0,52879	-0,52848
$\max e_i(h)$	0,03720415	0,00067291	0,00005942	0,00033550	

Таблица 10.3

t_k	Метод Эйлера неявный, y_k	Метод Эйлера модифицированный, y_k	Метод Адамса-Башфорта, y_k	Метод трапеций, y_k	$y(t_k)$
0,0	-1,00000	-1,00000	-1,00000	-1,00000	-1,00000
0,1	-0,90083	-0,90000	-0,90023	-0,90023	-0,90016
0,2	-0,80316	-0,80095	-0,80132	-0,80132	-0,80121
0,3	-0,70753	-0,70357	-0,70402	-0,70401	-0,70388
0,4	-0,61440	-0,60844	-0,60893	-0,60890	-0,60877
0,5	-0,52408	-0,51601	-0,51650	-0,51645	-0,51632
0,6	-0,43684	-0,42663	-0,42709	-0,42702	-0,42691
0,7	-0,35287	-0,34054	-0,34095	-0,34087	-0,34078
0,8	-0,27229	-0,25794	-0,25828	-0,25818	-0,25812
0,9	-0,19518	-0,17894	-0,17920	-0,17908	-0,17905
1,0	-0,12158	-0,10357	-0,10378	-0,10364	-0,10364
$\max e_i(h)$	0,01958133	0,00032586	0,00012145	0,00003005	

10.8. Задачи для самостоятельного решения

1. Выписать формулы: а) неявного метода Эйлера; б) метода трапеций; в) метода Адамса-Мултона для решения задачи Коши: $x' - 4x = \sin t$, $x(0) = 2$.

Ответ:

а) $X_{k+1} = X_k + h(4X_{k+1} + \sin t_{k+1})$, $X_0 = 2$, $k = 0, 1, \dots$;

б) $X_{k+1} = X_k + \frac{h}{2} (4X_k + \sin t_k + 4X_{k+1} + \sin t_{k+1})$, $X_0 = 2$, $k = 0, 1, \dots$;

в) $X_{k+1} = X_k + \frac{h}{12} \{ 5(4X_{k+1} + \sin t_{k+1}) + 8(4X_k + \sin t_k) - (4X_{k-1} + \sin t_{k-1}) \}$, $k = 1, 2, \dots$

2. Выписать формулы: а) неявного метода Эйлера; б) метода трапеций для решения задачи Коши:

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 9t, & x(0) = 1, \\ y' = 2x + y - 4e^t, & y(0) = 2. \end{cases}$$

Ответ:

а) $x_{k+1} = x_k + h(x_{k+1} + 2y_{k+1} - 9t_{k+1})$, $x_0 = 1$,

$y_{k+1} = y_k + h(2x_{k+1} + y_{k+1} - 4e^{t_{k+1}})$, $y_0 = 2$, $k = 0, 1, \dots$;

б) $x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2} (x_k + 2y_k - 9t_k + x_{k+1} + 2y_{k+1} - 9t_{k+1})$, $x_0 = 1$,

$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} (2x_k + y_k - 4e^{t_k} + 2x_{k+1} + y_{k+1} - 4e^{t_{k+1}})$, $y_0 = 2$, $k = 0, 1, \dots$

Заключение к части 2

Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем являются самым важным применением теории дифференциальных уравнений. Большинство практических моделей динамических систем исследуются именно с помощью численных методов. Объясняется это тем, что модели реальных явлений, как правило, описываются достаточно сложными для аналитического исследования выражениями. Естественно, что при этом значительно более широк и класс задач, к которым могут применяться численные методы, по сравнению с аналитическими.

Процесс получения приближенного решения в огромной степени ориентирован на квалифицированное использование современной вычислительной техники. Все описанные методы в совокупности представляют собой мощный и эффективный аппарат решения многих инженерных задач.

Ниже приведена классификация рассмотренных в пособии численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем.

**Классификация численных методов
решения обыкновенных
дифференциальных уравнений и систем**

ЯВНЫЕ МЕТОДЫ

Явный метод Эйлера

Метод Эйлера-Коши

Модифицированный
метод Эйлера

Метод предсказания и
коррекции

Явные методы
Рунге-Кутты

Метод
Рунге-Кутты-Мерсона

Методы
Адамса-Башфорта

Методы Фельберга

Методы Ингланда

Явные методы Милна

Методы Нюстрема

Явные методы
Хемминга

Экстраполяционные
методы

НЕЯВНЫЕ МЕТОДЫ

Неявный метод Эйлера

Метод трапеций

Метод Адамса-Мултона

Неявные метода Милна

Неявные методы
Хемминга

Методы дифференци-
рования назад

Неявные методы
Рунге-Кутты

Литература

1. Анисимов Б.В., Белов Б.И., Норенков И.П. Машинный расчет элементов ЭВМ. -М.: Высшая школа, 1976.
2. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. -М.: Наука, 1977.
3. Арнольд В.И. Теория катастроф. -М.: Наука, 1990.
4. Арушакян О.Б., Залеткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. -М.: Изд-во МГУ, 1990.
5. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. -М.: Мир, 1979.
6. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси. -М.: Наука, 1982.
7. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. -М.: Наука, 1989.
8. Вояков Е.А. Численные методы. -М.: Наука, 1982.
9. Гюенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э. Математические основы теории управляемых систем. -М.: Наука, 1969.
10. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. -М.: Физматгиз, 1963.
11. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ. -М.: Наука, 1987.
12. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. -М.: Факториал, 1997.
13. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. -М.: Факториал, 1997.
14. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра. -М.: Наука, 1984.
15. Ильин В.Н., Коган В.Л. Разработка и применение программы автоматизации схмотехнического проектирования. -М.: Радио и связь, 1984.
16. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. -М.: Наука, 1965.
17. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. -М.: Наука, 1986.

18. *Корн Г, Корн Т.* Справочник по математике. -М.: Наука, 1977.
19. *Летова Т.А., Пантелеев А.В.* Экстремум функций в примерах и задачах. -М.: Изд-во МАИ, 1998.
20. *Мак-Кракен Д., Дорн У.* Численные методы и программирование на Фортране. -М.: Мир, 1977.
21. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. -Л.: Изд-во ЛГУ, 1955.
22. Методы описания, анализа и синтеза нелинейных систем управления /В.В.Семенов, А.В.Пантелеев, Е.А.Руденко, А.С.Бортаковский. -М.: Изд-во МАИ, 1993.
23. Оптимизация и численные методы в задачах радиоэлектроники и экономики: Учебное пособие /М.М.Хрусталева, А.В.Пантелеев и др. -М.: Изд-во МАИ, 1989.
24. *Пантелеев А.В., Бортаковский А.С., Летова Т.А.* Оптимальное управление в примерах и задачах. -М.: Изд-во МАИ, 1996.
25. *Пантелеев А.В., Якимов А.С.* Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. -М.: Изд-во МАИ, 1998.
26. *Пантелеев А.В., Якимов А.С., Босов А.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в приложениях к анализу динамических систем. -М.: Изд-во МАИ, 1997.
27. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. -М.: Изд-во МГУ, 1952.
28. *Плис А.И., Сливина Н.А.* Лабораторный практикум по высшей математике. -М.: Высшая школа, 1994.
29. *Пунтус А.А.* Качественные методы исследования динамических систем. -М.: МАИ, 1987.
30. *Самойленко А.М., Кривошей С.А., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. -М.: Высшая школа, 1989.
31. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Специальные разделы тематического анализа /Под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. -М.:Наука, 1981.

32. Сборник задач по методам вычислений: Учебное пособие для вузов /Под ред. П.И.Монастырского - 2-е изд., перераб. и доп. -М.:Физматлит, 1994.
33. Семенов В.В., Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Математическая теория управления в примерах и задачах. -М.: Изд-во МАИ, 1997.
34. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений /Под ред. Дж.Холл, Дж.Уатт. -М.: Мир, 1979.
35. Смирнов В.И. Курс высшей математики, Т.4, Ч.1. -М.: Наука, 1974.
36. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. -М.: Физматгиз, 1958.
37. Федорук М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. -М.: Наука, 1980.
38. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. -М.: Наука, 1973.
39. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. -М.: Мир, 1980.
40. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. -М.: Мир, 1977.
41. Штеттер А. Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений. -М.: Мир, 1978.
42. Чакри Ф. Современная теория управления. -М.: Мир, 1975.
43. Чуа Л.О., Пен-Мин-Лин. Машинный анализ электронных схем. -М.: Энергия, 1980.
44. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. -М.: Наука, 1969.
45. Gear C.W. Numerical initial value problems in ordinary differential equations. -Prentice-Hall, 1971.
46. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving ordinary differential equations. Nonstiff problems. -Springer-Verlag, 1991.
47. Fatunla S.A. Numerical methods for initial value problems in ordinary differential equations. -Academic Press, 1988.

Оглавление

Введение	3
Часть 1. Аналитические методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений	9
1. Общие теоретические положения	9
1.1. Основные определения	9
1.2. Основные понятия, связанные с исследованием и решением дифференциальных уравнений	18
1.3. Задачи для самостоятельного решения	27
2. Дифференциальные уравнения первого порядка	31
2.1. Уравнения с разделяющимися переменными	31
2.1.1. Метод решения	31
2.1.2. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными	35
2.2. Однородные уравнения	41
2.2.1. Метод решения	41
2.2.2. Уравнения, приводящиеся к однородным	44
2.3. Уравнения в полных дифференциалах	47
2.3.1. Метод решения	47
2.3.2. Уравнения, приводящиеся к уравнениям в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель	50
2.4. Линейные уравнения	66
2.4.1. Метод решения	66
2.4.2. Уравнения, приводящиеся к линейным. Уравнение Бернулли	71
2.5. Уравнение Риккати	75
2.5.1. Постановка задачи. Случай интегрируемости уравнения Риккати	75
2.5.2. Метод вспомогательных переменных	82
2.6. Уравнения, не разрешенные относительно производной	85
2.6.1. Постановка задачи	85
2.6.2. Уравнения первого порядка n -й степени	86
2.6.3. Неполные уравнения	89
2.6.4. Полные уравнения	93
2.6.5. Простейшие краевые задачи	101
2.7. Задачи для самостоятельного решения	106
3. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка	110
3.1. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	110
3.1.1. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами	110
3.1.1.1. Нахождение общего решения однородного уравнения	110
3.1.1.2. Анализ устойчивости	115
3.1.2. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами	117
3.1.2.1. Метод подбора частного решения	117
3.1.2.2. Метод вариации произвольных постоянных	125

3.1.2.3. Решение задачи Коши. Анализ выходных процессов ..	128
3.1.2.4. Применение переходных функций для анализа выходных процессов	134
3.2. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка с переменными коэффициентами	138
3.2.1. Уравнение Эйлера	138
3.2.2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами	148
3.3. Задачи для самостоятельного решения	152
4. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	155
4.1. Однородные системы	155
4.1.1. Нахождение общего решения однородной системы	155
4.1.2. Анализ устойчивости	178
4.2. Неоднородные системы	179
4.2.1. Нахождение общего решения неоднородной системы. Метод приведения системы n линейных уравнений к одному уравнению n -го порядка	179
4.2.2. Метод подбора частного решения	185
4.2.3. Метод вариации произвольных постоянных	193
4.2.4. Решение задачи Коши. Анализ выходных процессов	197
4.3. Задачи для самостоятельного решения	206
5. Применение операционного исчисления для решения линейных дифференциальных уравнений и систем	209
5.1. Преобразование Лапласа	209
5.1.1. Основные определения	209
5.1.2. Свойства преобразования Лапласа	212
5.1.3. Нахождение изображения по оригиналу	221
5.1.4. Нахождение оригинала по изображению	231
5.2. Применение преобразования Лапласа	237
5.2.1. Решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и систем	237
5.2.2. Применение передаточных функций для анализа выходных процессов	255
5.3. Задачи для самостоятельного решения	265
6. Анализ поведения динамических систем на фазовой плоскости	267
6.1. Динамические системы и их исследование в фазовом пространстве	267
6.2. Анализ поведения динамических систем второго порядка на фазовой плоскости	269
6.2.1. Классификация точек покоя линейных автономных динамических систем второго порядка	270
6.2.2. Алгоритм построения фазового портрета и анализа устойчивости линейных автономных динамических систем второго порядка	273
6.2.3. Нелинейные автономные динамические системы второго порядка	280
6.3. Задачи для самостоятельного решения	293

7. Приближенно-аналитические методы решения дифференциальных уравнений и систем	294
7.1. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов	294
7.1.1. Постановка задачи	294
7.1.2. Метод неопределенных коэффициентов	295
7.1.3. Метод последовательного дифференцирования	306
7.2. Метод последовательных приближений	313
7.3. Метод Чаплыгина	323
7.4. Метод Ньютона-Канторовича	328
7.5. Задачи для самостоятельного решения	330
Заключение к части 1	332
Часть 2. Численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений	334
8. Принципы построения, устойчивость и точность численных методов	334
9. Явные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений	339
9.1. Явный метод Эйлера	339
9.2. Метод Эйлера-Коши	342
9.3. Модифицированный метод Эйлера	342
9.4. Метод предсказания и коррекции	343
9.5. Явные методы Рунге-Кутты	343
9.6. Метод Рунге-Кутты-Мерсона	346
9.7. Методы Адамса-Башфорта	347
9.8. Методы Фельберга	348
9.9. Методы Ингленда	349
9.10. Методы Нюстрема	349
9.11. Явные методы Милна	350
9.12. Явные методы Хемминга	351
9.13. Экстраполяционные методы	351
9.14. Задачи для самостоятельного решения	358
10. Неявные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений	359
10.1. Неявный метод Эйлера	359
10.2. Метод трапеций	359
10.3. Метод Адамса-Мултона	359
10.4. Неявные методы Милна	361
10.5. Неявные методы Хемминга	361
10.6. Методы дифференцирования назад	362
10.7. Неявные методы Рунге-Кутты	364
10.8. Задачи для самостоятельного решения	369
Заключение к части 2	369
Литература	371